IDICSO

Instituto de Investigación en Ciencias Sociales
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad del Salvador

ÁREA EMPLEO Y POBLACIÓN

Metodología de análisis de panel de variables categóricas

SEGUNDA PARTE

por **Héctor Maletta***

Buenos Aires, DIC/2002

* **MALETTA, Héctor.** Lic. en Sociología, Universidad Católica Argentina. Doctor en Economía, Universidad de Bologna (Italia). Docente de carreras de grado y posgrado, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad del Salvador (USAL). Investigador Principal, Área Empleo y Población, IDICSO, USAL. Consultor de organismos internacionales, especialmente la FAO, pero también otros como el FIDA y el BID. Consultor internacional en casi todos los países de América Latina y en algunos países de África y Asia.

BREVE HISTORIA DEL IDICSO. Los orígenes del IDICSO se remontan a 1970, cuando se crea el "Proyecto de Estudio sobre la Ciencia Latinoamericana (ECLA)" que, por una Resolución Rectoral (21/MAY/1973), adquiere rango de Instituto en 1973. Desde ese entonces y hasta 1981, se desarrolla una ininterrumpida labor de investigación, capacitación y asistencia técnica en la que se destacan: estudios acerca de la relación entre el sistema científico-tecnológico y el sector productivo, estudios acerca de la productividad de las organizaciones científicas y evaluación de proyectos, estudios sobre política y planificación científico tecnológica y estudios sobre innovación y cambio tecnológico en empresas. Las actividades de investigación en esta etapa se reflejan en la nómina de publicaciones de la "Serie ECLA" (SECLA). Este instituto pasa a depender orgánica y funcionalmente de la Facultad de Ciencias Sociales a partir del 19 de Noviembre de 1981, cambiando su denominación por la de Instituto de Investigación en Ciencias Sociales (IDICSO) el 28 de Junio de 1982.

Los fundamentos de la creación del IDICSO se encuentran en la necesidad de:

- Desarrollar la investigación pura y aplicada en Ciencias Sociales.
- Contribuir a través de la investigación científica al conocimiento y solución de los problemas de la sociedad contemporánea.
- Favorecer la labor interdisciplinaria en el campo de las Ciencias Sociales.
- Vincular efectivamente la actividad docente con la de investigación en el ámbito de la facultad, promoviendo la formación como investigadores, tanto de docentes como de alumnos.
- Realizar actividades de investigación aplicada y de asistencia técnica que permitan establecer lazos con la comunidad.

A partir de 1983 y hasta 1987 se desarrollan actividades de investigación y extensión en relación con la temática de la integración latinoamericana como consecuencia de la incorporación al IDICSO del Instituto de Hispanoamérica perteneciente a la Universidad del Salvador. Asimismo, en este período el IDICSO desarrolló una intensa labor en la docencia de post-grado, particularmente en los Doctorados en Ciencia Política y en Relaciones Internacionales que se dictan en la Facultad de Ciencias Sociales. Desde 1989 y hasta el año 2001, se suman investigaciones en otras áreas de la Sociología y la Ciencia Política que se reflejan en las series "Papeles" (SPI) e "Investigaciones" (SII) del IDICSO. Asimismo, se llevan a cabo actividades de asesoramiento y consultoría con organismos públicos y privados. Sumándose a partir del año 2003 la "Serie Documentos de Trabajo" (SDTI).

La investigación constituye un componente indispensable de la actividad universitaria. En la presente etapa, el IDICSO se propone no sólo continuar con las líneas de investigación existentes sino también incorporar otras con el propósito de dar cuenta de la diversidad disciplinaria, teórica y metodológica de la Facultad de Ciencias Sociales. En este sentido, las áreas de investigación del IDICSO constituyen ámbitos de articulación de la docencia y la investigación así como de realización de tesis de grado y post-grado. En su carácter de Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad del Salvador, el IDICSO atiende asimismo demandas institucionales de organismos públicos, privados y del tercer sector en proyectos de investigación y asistencia técnica.

IDICSO

Departamento de Comunicación

Email: idicso@yahoo.com.ar

Web Site: http://www.salvador.edu.ar/csoc/idicso

SEGUNDA PARTE

TABLA DE CONTENIDOS

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE PANEL DE VARIABLES CATEGÓRICAS

SEGUNDA PARTE

3. Procesos de Markov

La clasificación y tabulación de los datos de panel, aparte de servir con fines descriptivos, puede usarse como base a fin de aplicar hipótesis explicativas. La "explicación", en este caso, significa postular algún mecanismo subyacente, generalmente a nivel de los individuos o unidades de análisis, que sea capaz de generar los datos observados. Uno de los esquemas metodológicos más usuales, y que suministra una buena introducción al vocabulario técnico aplicable a este tema, son las llamadas "cadenas de Markov" o "modelos de Markov".

3.1. Características generales de los procesos de Markov

En su forma más sencilla, el modelo markoviano hipotetiza un proceso a nivel micro donde **cada individuo** en un estado ***i*** en el momento ***t*** está afectado por determinadas **probabilidades de transición**, que se denotan como $r_{ij}^{t,t+1}$, y que miden sus probabilidades de estar en el estado **j** en el momento ***t+1*** si es que estuvo en el estado ***i*** en el momento ***t*** (incluyendo la probabilidad $r_{ii}^{t,t+1}$ de **permanecer** en el mismo estado ***i***). Estas probabilidades se supone que son **iguales para todos los individuos**, **constantes en el tiempo**, y asimismo **independientes de la trayectoria anterior o posterior de cada sujeto**.

Los modelos de Markov consideran al tiempo como una variable **discreta**. Se comparan momentos ***t*** y ***t+1*** pero no se hace ningún supuesto sobre el período intermedio entre ambas fechas. Esas probabilidades de transición markovianas son **condicionamientos internos (no observables) de cada individuo**, y no deben confundirse conceptualmente con la **proporción observada de cambios de estado** entre dos rondas sucesivas de la encuesta. Esas proporciones observadas (los porcentajes de fila considerados anteriormente) son **propiedades de la población en su conjunto** y no propiedades de cada individuo, si bien a menudo las proporciones observadas se usan como mediciones estimativas de aquellas probabilidades no observables.

Si se supone que todos los individuos están afectados por las mismas probabilidades de transición, y se supone asimismo que cada individuo actúa solamente en función de sus probabilidades subjetivas de transición, la proporción de sujetos que cambia de estado (magnitud observable en un panel) coincidirá con las probabilidades individuales de transición postuladas por el modelo de Markov. Pero esta coincidencia es una **implicancia lógica del modelo teórico**, y no un dato de la realidad. Por lo tanto no puede considerarse a las proporciones observadas como una **definición** de las probabilidades de transición. Si los supuestos del modelo no se cumplen las proporciones observadas no podrían equipararse a las probabilidades subjetivas de los individuos. Por ejemplo, si hubiese probabilidades subjetivas **heterogéneas** entre los individuos, la proporción agregada representaría sólo una media estadística y no coincidiría con las probabilidades de transición de ningún individuo (excepto las de alguno cuyas probabilidades coincidan por casualidad con el promedio).

Las características generales de las probabilidades de transición en un proceso de Markov son las siguientes:

Homogeneidad	Las probabilidades de pasar a otro estado, o de permanecer en el mismo estado, son las mismas para todos los sujetos
Constancia	Las probabilidades de transición son constantes en el tiempo
Amnesia	Las probabilidades de transición de un individuo dependen sólo de su estado actual, y no de su trayectoria anterior

La **homogeneidad** de las probabilidades individuales de transición significa que todos los sujetos o unidades en un cierto estado tienen las mismas probabilidades de estar en otro estado o de volver a aparecer en el mismo estado en la siguiente fecha de observación.. Versiones más complicadas del modelo permiten diferenciar entre sujetos, mediante la introducción de variables que los tipifican (por ejemplo, las mujeres podrían tener una mayor o menor probabilidad de transición que los varones, siendo el sexo la variable que tipifica los casos y permite asignarles una probabilidad específica) o mediante el supuesto de que las probabilidades de los individuos varían aleatoriamente en torno a la probabilidad promedio. Por el momento nos referimos a los modelos de Markov en su forma más simple, esto es, sin variables de tipificación que rompan el supuesto de homogeneidad, y asumiendo que todos los individuos están afectados por las mismas probabilidades de pasar a otros estados.

Hay sin embargo un enfoque que se aparta de este supuesto: es el que divide a los sujetos en dos grandes clases: los móviles y los inmóviles (denominados respectivamente *movers* y *stayers* en la jerga habitual de esos modelos). Los móviles tienen tasas de transición diferentes de cero, las mismas para todos ellos, mientras para los inmóviles no hay cambio alguno a lo largo del tiempo: permanecen siempre en el mismo estado inicial, con tasas de transición iguales a cero para todo ***i j***, e iguales a 1 para ***i=j***. Esta simplificación puede ser útil en algunas situaciones, pero es sin duda una simplificación extrema. Versiones más sofisticadas de este enfoque suponen una gradación de sujetos con mayor o menor volatilidad, sin necesidad de suponer que los menos volátiles sean totamente incapaces de cambiar de estado.

La **constancia** significa que la probabilidad de pasar de un estado **i** a un estado **j** es la misma en todos los períodos. También aquí, por supuesto, el supuesto puede ser flexibilizado haciendo que la probabilidad sea función del tiempo. Por ejemplo, para una mujer la probabilidad de pasar de "inactiva" a "activa" puede tener tendencia creciente si se registra una tendencia al aumento de la participación laboral de la mujer. Sin embargo, un modelo con probabilidades de transición constantes **a nivel de los individuos** puede generar un proceso en el cual se registra una creciente cantidad de individuos en determinados estados; podría así suceder que un modelo en que la probabilidad de entrar en actividad sea constante para cada individuo explique un proceso en el cual hay cada vez más mujeres activas. Ello podría ser así, por ejemplo, si al mismo tiempo hay un alargamiento de la vida o una disminución de la fecundidad que hace permanecer más años a las mujeres en la esfera laboral. Pese a ello, algunos modelos markovianos plantean **probabilidades variables en el tiempo**. Sin embargo en el presente caso estamos circunscribiéndonos al caso de **probabilidades constantes.**

La **amnesia**, o más técnicamente la **independencia de la trayectoria anterior** significa que los sujetos **"no tienen memoria"**: la probabilidad de transición de ***i*** a ***j*** entre los momentos ***t*** y ***t+1*** es igual para todos los sujetos que están en el estado ***i*** en el momento ***t***, independientemente del estado en que se encontraban en el momento ***t-1*** o en períodos anteriores. Una natural extensión de este supuesto de ausencia de memoria es el supuesto de **ausencia de previsión**, según el cual las probabilidades son también **independientes de la trayectoria futura**, es decir, independientes del estado en que se encontrarán los sujetos en el momento ***t+2*** o posteriormente.

El supuesto de amnesia es bastante fuerte. Por ejemplo, significa que la probabilidad de pasar de "Ocupado" a "Desocupado" entre octubre de 1999 y mayo de 2000 es independiente de la historia ocupacional anterior del individuo. Obviamente es posible que la probabilidad de caer en el desempleo en ese lapso puede depender de si el individuo estuvo siempre ocupado o si había estado desocupado antes de octubre de 1999.

El supuesto de independencia respecto al futuro no es tan restrictivo en la práctica, pero a veces cobra relevancia, pues el evento futuro de algún modo puede ser indicador de algún suceso no observado del pasado. Por ejemplo, en un panel sobre fumadores crónicos, pasar de fumador a no fumador puede no ser independiente del hecho (futuro) de que el sujeto muera de cáncer de pulmón, pues este hecho futuro puede ser un indicador de que al momento de dejar el cigarrillo esa persona ya tenía indicios de que podría estar padeciendo el cáncer o estaría próximo a desarrollarlo, y por eso precisamente dejó de fumar. El supuesto de "independencia respecto al futuro" dice que las probabilidades de dejar de fumar son las mismas para sujetos fumadores que terminarán teniendo cáncer de pulmón como para aquellos fumadores que se librarán eventualmente de contraer esa enfermedad.

La ausencia total de "memoria" o de "previsión" configura un caso extremo, que corresponde a un modelo de Markov **de primer orden**: sólo el estado del sujeto en el momento inicial determina las probabilidades de transición. En un modelo **de segundo orden** las probabilidades que afectan al individuo en el momento ***t*** están determinadas por el estado del sujeto **en los dos últimos momentos:** en el momento ***t*** y en el momento ***t-1***, pero no por los anteriores. El sujeto tiene buena memoria en el corto plazo pero sufre de amnesia en cuanto al largo plazo. En general, en un modelo **de orden *h*** las probabilidades de transición en el momento **t** están determinadas por los estados en que estuvo el sujeto en los momentos ***t, t-1, t-2, ..., t-h***.

Sin embargo, esto no cambia la esencia del modelo, ya que las trayectorias completas durante ***h*** períodos pueden ser consideradas como "estados". Por ejemplo, en el momento inicial algunos sujetos están en el estado "ocupado que no estaba desocupado hace seis meses" mientras otros están como "ocupados que seis meses antes estaban desocupados". Los estados finales pueden definirse de igual modo, con lo cual los sujetos pasarían de ostentar una cierta trayectoria acumulada hasta el momento ***t*** a tener otra trayectoria acumulada hasta el momento ***t+1***.

Algunas transiciones entre trayectorias serían imposibles, porque gran parte de la trayectoria inicial debe reaparecer intacta en la trayectoria final; por ejemplo, los que estaban ocupados en el momento ***t*,** sea cual fuere su trayectoria anterior, no podrían pasar al estado final "ocupados que en la ronda anterior estaban desocupados". Esto involucraría una contradicción.

En esta transformación del modelo, en la cual en lugar de observar transiciones entre estados se observen transiciones **entre trayectorias**, el número de "estados" se multiplica, haciendo que se necesiten muestras más grandes para llegar a resultados significativos. Esta consideración práctica hace menos atractivo el uso de modelos de Markov de orden superior. Parece más lógica la estrategia de probar primero un modelo de Markov simple o con pocas complicaciones, tratando así de predecir las probabilidades de transición de la manera más simple posible. En general, cuando ello no es suficiente es preferible recurrir a otros modelos, aunque no necesariamente a los procesos de Markov de orden superior, por las dificultades que ellos implican para el análisis. Más adelante se retorna sobre este punto.

3.2. La contrastación empírica de los supuestos de Markov

La hipótesis de la **constancia** puede ser puesta a prueba si se dispone de varios períodos de observación: si esa hipótesis fuese cierta, las diferencias de las proporciones de flujo entre períodos tendrían que ser poco significativas, atribuibles a errores de muestreo. En el caso de las variables de empleo, que están fuertemente influidas por los ciclos económicos, es difícil presuponer esa constancia. Pero algunos otras transiciones (por ejemplo los cambios de estado civil de la población, o las transiciones de los estudiantes entre distintos niveles del sistema educativo) probablemente sean más constantes. La hipótesis de "amnesia" también puede ser verificada comparando las proporciones de flujo para sujetos con diferentes experiencias anteriores (por ejemplo la probabilidad de perder el empleo por parte de personas con o sin experiencias recientes de desocupación).

En general ninguna de las hipótesis (homogeneidad, constancia y amnesia) se cumplirá. Pero ellas no están ahí para cumplirse, sino para determinar un modelo de "línea de base", al cual luego se le incorporan variables para explicar las diferencias entre ese modelo y la realidad. Por ejemplo, una variable del ciclo económico (como la tasa de crecimiento del PBI) puede usarse para como indicadora del contexto macro para separar el componente "constante" y el componente "cíclico" en la transición entre ocupación y desocupación o viceversa. Según esa clase de enfoque, en cada período hay dos clases de transiciones entre empleo y desempleo: algunas de esas transiciones son "normales" y ocurren en todos los períodos; otras son inducidas por la situación económica general, de modo que aumentan las transiciones hacia el desempleo en épocas de recesión, y disminuyen en épocas de expansión económica.

Este enfoque se relaciona estrechamente con el que Coleman llama "método de los residuos" (Coleman, 1964b, capítulo 15). La idea general de ese método consiste en generar un modelo teórico que refleje el efecto de variables "triviales" u "obvias", restringiendo la investigación a las **desviaciones** o **residuos** respecto a lo que debería observarse en el caso trivial. Por ejemplo, un factor trivial que puede influir muchas variables económicas es el nivel de ingreso. Si la conducta de los individuos, por ejemplo sus hábitos de consumo, responde nítidamente a diferencias en sus ingresos, no hay mucho más que decir. Pero si se observan individuos con fuertes desviaciones respecto a esa explicación "trivial", será necesario encontrar otras explicaciones. La investigación, según este enfoque, debe descartar primero los factores triviales, para luego concentrarse en los residuos no triviales.

De este modo, no importa si el modelo teórico concuerda con la realidad o no: es posible que el modelo se use sólo para "descartar" o "descontar el efecto" de una explicación trivial cuyo efecto pueda ser cuantificado y estimado separadamente, dejando los residuos o desviaciones como fenómenos a explicar. Una aplicación posible de este método suele aparecer en los estudios de psicología económica o de sociología económica. Se procura primero explicar la conducta de los sujetos (por ejemplo consumidores) mediante hipótesis basadas en el modelo microeconómico convencional de maximización de utilidades: se aplica un modelo que supone agentes económicos racionales maximizadores de utilidad; si esos supuestos explican los fenómenos observados dejando residuos no significativos, allí acaba la investigación; si en cambio hay residuos significativos, ello indica que no se cumple alguno de los supuestos del modelo microeconómico convencional, y ello origina un interesante programa de investigación.

Si se adopta ese punto de vista, un modelo extremadamente sencillo como los más simples modelos de Markov puede servir para generar una línea de base, explicando trivialmente la conducta de los individuos en función de que todos ellos poseen probabilidades homogéneas y constantes de pasar de un estado a otro, para concentrar luego la investigación en las desviaciones observadas respecto a esa explicación trivial. En líneas generales, entonces, el análisis markoviano parte de un "modelo básico" con probabilidades constantes y sin memoria, y luego incorpora factores que puedan explicar desviaciones entre la realidad y ese modelo básico.

La "memoria" de los sujetos respecto a su experiencia anterior también puede afectar su comportamiento tanto como la heterogeneidad de los sujetos en cuanto a determinados factores diferenciadores. Al incorporar el factor memoria o experiencia anterior pueden originarse diversas líneas interpretativas. Una de ellas es la hipótesis de la **autoselección**: la experiencia de haber estado desocupado no sería la "causa" de que el sujeto pase nuevamente a la desocupación, sino sólo un indicador de su tendencia a quedarse sin empleo. Si el individuo cayó una vez en el desempleo, "por algo habrá sido", y ese algo hará que tenga más chance de quedar desocupado más tarde.

Otra es la hipótesis del **aprendizaje**, que puede ser positivo o negativo. El haber tenido una experiencia aumenta o disminuye la probabilidad de volverla a tener. El **aprendizaje negativo** reduce la posibilidad de volver a caer en situaciones desagradables cuando el sujeto ya ha tenido la experiencia, y podría llamarse "hipótesis del gato escaldado": si un individuo una vez perdió su empleo, la próxima vez se cuidará más de no perderlo, y por lo tanto su chance de quedar sin trabajo será menor que de la de sus colegas que aun no han pasado por la experiencia de la desocupación. El **aprendizaje positivo** incrementa la posibilidad de pasar a estados agradables o deseables para los individuos que ya tuvieron esa experiencia positiva en el pasado. Por ejemplo: si un individuo estuvo desocupado en el pasado y luego encontró empleo, la próxima vez que caiga en la desocupación tendrá más probabilidad de encontrar empleo que los que están desempleados por primera vez, por su mayor experiencia anterior en la búsqueda de trabajo. Discriminar cuál de estas posibles explicaciones es la que vale (autoselección, aprendizaje positivo o negativo) es un válido problema de investigación que puede ser enfocado mediante el análisis de panel.

3.3. Matriz de probabilidades de transición

El instrumento fundamental del análisis markoviano es una **matriz de probabilidades de transición**. Cada individuo tiene un conjunto de probabilidades subjetivas de estar en cada estado ***j*** en el momento ***t+1***, dependiendo únicamente del estado ***i*** en que se encontraba en el momento ***t***. Para un sujeto ***k*** la probabilidad $r_{ijk}^{t,t+1}$, que a veces se denota incluyendo sólo el punto inicial del intervalo, r_{ijk}^{t}, indica la probabilidad de que ese sujeto pase de estar en el estado ***i*** en el momento ***t*** a estar en el estado ***j*** en el momento ***t+1***. El supuesto de **homogeneidad** asume que esta probabilidad es la misma para todos los sujetos, y el supuesto de **constancia** asume que esta probabilidad es la misma en todos los períodos. Por ello los modelos de Markov postulan lo siguiente:

$$r_{ijk}^{t,t+1} = r_{ijk}^{t} = r_{ij} \qquad \textit{para todo } \boldsymbol{k} \textit{ y para todo } \boldsymbol{t}$$

Por tal razón en la notación habitual, y salvo situaciones especiales que aconsejen lo contrario, se omiten tanto el subíndice ***k*** que identifica a cada sujeto como el superíndice ***t*** o ***t+1*** que identifica el período o fecha de la observación.

Otro aspecto digno de destacar es que los modelos de Markov no presuponen, de por sí, un **proceso continuo**. Operan como si el tiempo estuviese constituido por una sucesión de "instantes" discretos, y sólo comparan el estado de los sujetos en dos o más de estos "instantes". El tiempo intermedio no forma parte del modelo de Markov como tal.

En un caso simple con tres estados posibles, la matriz de probabilidades de cada individuo (y por consiguiente del conjunto de la población) sería así:

Una matriz de probabilidades de transición entre tres estados				
	Estado final			
Estado inicial	**1**	**2**	**3**	**Total**
1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	1
2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	1
3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	1

Como se indica en la tabla, las probabilidades de Markov son exhaustivas: la suma de todos los estados finales para un cierto estado inicial es igual a la unidad:

$$\sum_j r_{ij} = 1 \qquad \text{para todo estado inicial } \boldsymbol{i}$$

Aparte de las probabilidades de transición el modelo markoviano utiliza la **distribución marginal** de los sujetos entre los diferentes estados, también llamadas "**probabilidades de estado**" aunque este nombre no es muy correcto. Habrá una distribución **anterior (**también llamada **"inicial")** y una distribución **posterior** (o **"final"**) de los sujetos entre los varios estados posibles. Siguiendo la notación establecida para las cifras absolutas *N*, la definición general de estas proporciones de estado para cualquier estado ***i*** en un momento ***t*** es:

$$p_i^t = \frac{N_i^t}{N}$$

También para algunos propósitos los flujos de un estado a otro en el intervalo ***t,t+h***, es decir $N_{ij}^{t,t+h}$, pueden expresarse como proporción del número total de casos:

$$p_{ij}^{t,t+h} = \frac{N_{ij}^{t,t+h}}{N}$$

Estas proporciones sobre el total de la tabla se pueden denominar **proporciones de flujo**, y no deben ser confundidas con las **probabilidades de transición**, en las cuales el flujo no es dividido por el total de casos, sino por los casos que se encontraban en el estado inicial ***i***, o sea los que estaban en riesgo de efectuar el pasaje de ***i*** a ***j***:

$$r_{ij}^h = \frac{N_{ij}^{t,t+h}}{N_i^t}$$

Las proporciones de flujo suman 1 para el total de casos, es decir para el total de la tabla de rotación. Las probabilidades de transición, en cambio, suman 1 para cada **fila** de la tabla de rotación.

$$\sum_i \sum_j p_{ij}^{t,t+h} = 1 \qquad \sum_j r_{ij}^h = 1$$

Estas probabilidades de transición a lo largo de un intervalo de longitud ***h*** en general se suponen constantes, por lo cual la referencia temporal a los instantes ***t*** y ***t+h*** puede ser omitida cuando ello no da lugar a confusión. Si bien esas probabilidades dependen de la longitud ***h*** del intervalo considerado, esa referencia también puede generalmente ser omitida, para así denotar esas probabilidades con la notación r_{ij}. Sin embargo, es menester recordar que esas probabilidades de transición se refieren siempre a un período determinado, y cambiarían sus valores si, por ejemplo, los intervalos entre las rondas del panel fuesen más breves o más prolongados.

Si se estiman las probabilidades de transición en un modelo de Markov, r_{ij}, a partir de una tabla de rotación con datos en panel, y se supone que esas probabilidades son homogéneas y constantes, ellas podrían usarse para **prede-cir** la distribución de sujetos en una fecha ulterior, es decir, se puede estimar la distribución **esperada** de los sujetos al cabo de un período adicional. Es eviden-te que la **proporción esperada** de sujetos en un determinado estado ***j*** en el momento ***t+h*** es igual a la suma de los productos entre las proporciones iniciales de sujetos en los varios estados multiplicadas por sus respectivas probabilidades de transición:

$$p_{ej}^{t+h} = \sum_i p_i^t r_{ij}^h \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Por ejemplo, el porcentaje esperado de desocupados en octubre será la suma de:

(a) el porcentaje de desocupados en mayo, por su probabilidad de que permanezcan desocupados hasta octubre, más:

(b) el porcentaje de ocupados en mayo, por su probabilidad de quedar desocupados para octubre, más:

(c) el porcentaje de inactivos en mayo, por su probabilidad de entrar en actividad y estar desocupados para octubre.

De modo similar se puede estimar la **cantidad esperada** de sujetos en cada estado. Si la cantidad inicial de sujetos en un estado **j** en la ronda ***t*** es igual a N_j^t, y las probabilidades de transición son r_{ij}, la cantidad esperada en la ronda siguiente (***t+1***) será:

$$N_{ej}^{t+1} = \sum_i N_i^t r_{ij} \qquad \text{(Ec. 2)}$$

La proporción efectivamente observada p_j en el momento ***t+1*** puede no coincidir con la proporción esperada p_{ej}. La proporción efectiva final puede ser considerada como la suma de la proporción esperada r_{ej}, más el efecto de diversas variables explicativas, más un error aleatorio:

$$p_j^{t+1} = p_{ej}^{t+1} + f(X,W,Z) + e \qquad \text{(Ec.3)}$$

Esto puede reducirse a una regresión donde la variable dependiente no sea la probabilidad final sino la **diferencia** o **desviación** entre la probabilidad observada y la esperada:

$$y = p_j^{t+1} - p_{ej}^{t+1} = f(X,W,Z) + e \qquad \text{(Ec.4)} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

Estas mismas relaciones pueden formularse también respecto a la cantidad de sujetos (*N*) en lugar de expresarse en función de la proporción que se encuentra o se espera encontrar en cada uno de los estados.

3.4. Modelos de Markov de orden superior

Las probabilidades de transición entre ***t*** y ***t+1*** pueden ser uniformes para todos los sujetos que están en un determinado estado en la ronda ***t***, o pueden variar según los **estados anteriores** que hayan atravesado los sujetos (por ejemplo su condición de ocupación en una ronda anterior), con lo cual el modelo markoviano simple de primer orden se transformaría en un modelo markoviano con memoria, o de orden superior. Pero en ese caso, algunas de las probabilidades de transición serían por definición iguales a cero, pues corresponden a situaciones imposibles. El siguiente ejemplo ilustra las probabilidades de transición entre los momentos o fechas ***t*** y ***t+1*** en un modelo de segundo orden con dos estados posibles (denominados 1 y 2).

Estado inicial		**Estado final**			
Estado en t-1	**Estado en t**	**t=1, t+1=1**	**t=1, t+1=2**	**t=2, t+1=1**	**t=2, t+1=2**
1	**1**	p_{1111}	p_{1112}	$p_{1121}=0$	$p_{1122}=0$
1	**2**	$P_{1211}=0$	$p_{1212}=0$	p_{1221}	p_{1222}
2	**1**	P_{2111}	p_{2112}	$p_{2121}=0$	$p_{2122}=0$
2	**2**	$p_{2211}=0$	$p_{2212}=0$	p_{2221}	p_{2222}

Las celdillas sombreadas representan situaciones imposibles, cuya probabilidad es cero. Por ejemplo, en la primera fila la probabilidasd p_{1121} es cero porque incluye como estado inicial sujetos que en el período **t** estaban en el estado 1, y como estado final sujetos que en el mismo período **t** estaban en el estado 2, lo cual es imposible: los sujetos involucrados tendrían que estar en dos estados distintos en el mismo período **t**. Sólo las celdillas no sombreadas pueden tener probabilidades diferentes de cero. En estas probabilidades "posibles", los dos subíndices internos del cuarteto de subíndices (es decir, el estado final de la trayectoria inicial, y el estado inicial de la trayectoria final) deben coincidir, como por ejemplo en $p_{1\underline{22}1}$.

Las transiciones factibles (no necesariamente iguales a cero) podrían también ser expresadas en forma de **probabilidades de trayectorias** con tres puntos. Por ejemplo p_{1221} es en realidad la probabilidad p_{121} de una trayectoria que empieza en el estado 1 en el tiempo **t-1**, pasa al estado 2 en **t**, y regresa al estado 1 en **t+1**. Todos los modelos markovianos de orden superior se reducen a un modelo referido a trayectorias con múltiples puntos. En general, trayectorias que tocan **k** puntos en el tiempo requieren modelos de orden **k-1**.

La representación precedente es sumamente engorrosa y poco intuitiva, aparte de tener una cantidad de celdillas "censuradas". En una representación alternativa de la matriz de transición para modelos de orden superior se pueden usar matrices **rectangulares**, definiendo los estados iniciales a partir de dos o más rondas, y los estados finales sólo por el estado en la próxima ronda.. Si el estado inicial se define según los últimos dos estados por los que pasó el sujeto, la matriz de transición sería la siguiente:

Estado inicial de 2º orden		Estado en t+1	
Estado en t-1	**Estado en t**	**1**	**2**
1	**1**	p_{111}	p_{112}
1	**2**	p_{121}	p_{122}
2	**1**	p_{211}	p_{212}
2	**2**	p_{221}	p_{222}

En esta representación no hay celdillas "imposibles". Aparecen solamente las celdillas "posibles" de la matriz anterior. Esta representación puede ser extendida fácilmente a modelos de orden 3 o superior, añadiendo mayor número de "antecedentes", con lo cual naturalmete el número de filas del cuadro iría aumentando: si se tomaran también los estados en ***t-2*** habría, en el caso del esquema precedente, no ya cuatro sino ocho estados iniciales, que representarían ocho "trayectorias" posibles a lo largo de las tres rondas anteriores (***t-2***, ***t-1*** y ***t***).

Si bien es posible que las probabilidades de transición estén de algún modo afectadas por la "historia anterior" de cada individuo, la experiencia ha mostrado que rara vez este problema se encara exitosamente mediante modelos de Markov de orden superior. Una de las razones para ello es el hecho de que los períodos entre rondas son generalmente arbitrarios, por lo cual no resulta plausible que el registro de la variable en la fecha de las rondas anteriores tenga tanta importancia. En cambio, en la mayor parte de los casos estas situaciones son enfrentadas mediante modelos que introducen a hipótesis de un **proceso continuo** a lo largo del tiempo, con tasas de transición constantes o variables, usando las observaciones de panel como una "muestra de instantes" en los cuales fue registrado el estado de los sujetos, y tratando de inferir los parámetros del proceso continuo subyacente a partir de esos datos. Más adelante se tratan algunos de estos enfoques.

3.5. Aplicaciones prospectivas de procesos de Markov

Las ecuaciones anteriores permiten obtener las probabilidades esperadas de estado del período **siguiente**.Como ya se mencionó, si se llega a la conclusión de que ciertas probabilidades de transición van a seguir rigiendo en el futuro, una de las posibles aplicaciones del modelo consiste en predecir la distribución en un momento futuro, separado del actual no ya por uno sino por dos o más períodos. Si se repite la aplicación de las probabilidades de transición sobre las probabilidades de estado esperadas resultantes de la primera proyección, se obtienen probabilidades esperadas para dentro de dos períodos, y así sucesivamente para períodos ulteriores.

$$p_{ej}^{t+2} = \sum_i p_{ei}^{t+1} r_{ij}$$

$$p_{ej}^{t+3} = \sum_i p_{ei}^{t+2} r_{ij}$$

$$p_{ej}^{t+u} = \sum_i p_{ei}^{t+u-1} r_{ij}$$

Si se representa como **R** la matriz de probabilidades de transición, y se define el vector-fila $\boldsymbol{p_i^t}$ de probabilidades de estado iniciales y el vector-fila $\boldsymbol{p_i^{t+1}}$ de las probabilidades finales, la ecuación 1 se puede expresar en notación matricial como sigue.[1]

$$p_{ej}^{t+1} = p_i^t R \qquad \text{(Ec. 5)}$$

Para predecir los valores del momento ***t+2*** se requeriría multiplicar por la matriz **R** a las probabilidades esperadas del momento ***t+1***:

$$p_{ej}^{t+2} = p_{ei}^{t+1} R \qquad \text{(Ec. 6)}$$

Reemplazando en la ecuación 6 las probabilidades de estado de ***t+1*** por su equivalente según la ecuación 5, la ecuación 6 queda en la forma siguiente:

$$p_{ej}^{t+2} = p_i^t R^2 \qquad \text{(Ec. 7)}$$

La notación R^2 corresponde al cuadrado de la matriz *R***,** es decir al producto matricial *RR*. En general, a partir de la distribución observada en el período ***t***, la distribución esperada en el período ***t+u*** (donde ***u*** es un número de intervalos, cada uno de ellos de longitud ***h***) podría ser predicha mediante la ecuación matricial:

$$p_{ej}^{t+u} = p_i^t R^u \qquad \text{(Ec. 8)}$$

Muchos procesos socioeconómicos tienden a ser inestables o cíclicos, y en algunos de ellos las probabilidades de transición difícilmente sean constantes. Pero se debe notar que es posible que las proporciones marginales tengan un comportamiento tendencial o cíclico aunque las probabilidades de transición sean constantes; y por otra parte, hay procesos más constantes o regulares que pueden ser predichos eficientemente por este enfoque. Por ejemplo, supongamos que se trate de estadísticas escolares, y que los estados básicos consistan en estar cursando diferentes grados, o convertirse en desertor, o ser un

[1] Los lectores no familiarizados con la notación matricial y las operaciones con matrices podrian consultar la nota técnica al final.

graduado. Las transiciones desde cada grado pueden consistir en repetir el grado, pasar al grado siguiente, graduarse, o desertar, y probablemente las probabilidades de transición no varíen mucho a lo largo del tiempo. A partir de una distribución inicial de sujetos y del número esperado de ingresantes en primer grado en sucesivos años podría aplicarse la ecuación 8 un número suficiente de veces para prever la población escolar en cada grado, así como el número de egresados del último grado y de desertores de cada grado, en los sucesivos períodos futuros.

Si las probabilidades de transición son constantes, la aplicación de la ecuación 8 permite estimar la distribución de los sujetos de estudio después de cualquier número de períodos. Un ejemplo sencillo permite ilustrarlo. Supóngase que se desea estimar de antemano el estado de salud de una población de 10.000 niños en sucesivos períodos futuros (por ejemplo, en los sucesivos meses). Los niños son revisados una vez por mes y clasificados como sanos o enfermos. El interés fundamental es saber cuántos niños estarán enfermos en cada mes, para poder planificar la prestación de servicios de salud. Para ello se cuenta con una estimación de la probabilidad de que un niño que estaba sano en un cierto mes esté enfermo en el mes siguiente, y de que un niño enfermo en un cierto mes haya sanado para el mes siguiente. Las probabilidades mensuales de transición que se han estimado son las que figuran en la siguiente **matriz de probabilidades de transición**:

		Mes t+1	
		Sano	**Enfermo**
Mes t	**Sano**	0.95	0.05
	Enfermo	0.80	0.20

Supongamos que en el mes inicial (t=1) todos los niños están sanos. Las cantidades esperadas al mes siguiente (t=2) serán de 9500 niños sanos y 500 enfermos, ya que hay una probabilidad de 0.05 de pasar del estado sano al estado enfermo en el curso de un mes. La operación matricialmente indicada sería la siguiente:

$$[10000 \quad 0]\times\begin{bmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.80 & 0.20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10000\times 0.95+0\times 0.80\\ 10000\times 0.05+0\times 0.20\end{bmatrix}=[9500 \quad 500]$$

Repitiendo la operación para el siguiente período, el vector inicial [10000 ; 0] se reemplaza por [9500 ; 500], que se vuelve a multiplicar por la matriz de probabilidades de transición. Así para el momento t=3, los 9500 niños sanos se transforman en 9025 sanos y 475 enfermos, pero al mismo tiempo un 80% de los

500 niños enfermos, es decir 400, se sana. De modo que en t=3 se espera que haya 9025+400=9425 niños sanos y 475+100=575 enfermos. La operación equivale a volver a multiplicar el vector inicial por la matriz de probabilidades de transición, o en otros términos, multiplicar el vector inicial por el **cuadrado** de la matriz:

$$[9500 \quad 500] \times \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.80 & 0.20 \end{bmatrix} = [10000 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.80 & 0.20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.80 & 0.20 \end{bmatrix} = [10000 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.80 & 0.20 \end{bmatrix}^2$$

Esta operación por lo tanto puede ser expresada en dos formas. La primera, que se indica en el miembro izquierdo de la ecuación precedente, consiste en multiplicar el vector [9500; 500] resultante de la primera operación por la matriz de probabilidades de transición.

$$[9500 \quad 500] \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.80 & 0.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9500 \times 0.95 + 500 \times 0.80 \\ 9500 \times 0.05 + 500 \times 0.20 \end{bmatrix} = [9425 \quad 575]$$

Equivalentemente, se puede elevar al cuadrado la matriz de probabilidades de transición, y luego multiplicar el vector inicial [10000; 0] por esa matriz elevada al cuadrado, como se indica en los miembros del centro y de la derecha de la penúltima ecuación. La matriz cuadrática es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.80 & 0.20 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.95 \times 0.95 + 0.05 \times 0.80 & 0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.20 \\ 0.80 \times 0.95 + 0.20 \times 0.80 & 0.80 \times 0.05 + 0.20 \times 0.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9425 & 0.0575 \\ 0.92 & 0.08 \end{bmatrix}$$

El producto por lo tanto es:

$$[10000 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0.9425 & 0.0575 \\ 0.92 & 0.08 \end{bmatrix} = [9425 \quad 575]$$

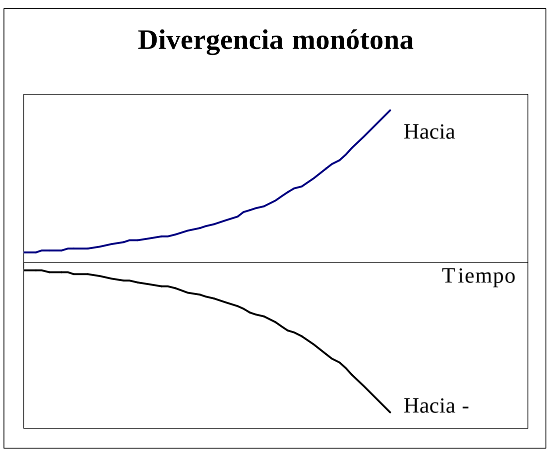
En el mes siguiente el proceso continuaría en la misma forma. Un 95% de los 9425 niños sanos (es decir 8954 niños) se espera que siga sano, y además un 80% de los 575 enfermos se sanará (añadiendo así otros 460 sanos), de modo que en t=4 habrá 8954+460=9414 niños sanos y consiguientemente 586 enfermos. El proceso de proyección podría continuar indefinidamente.

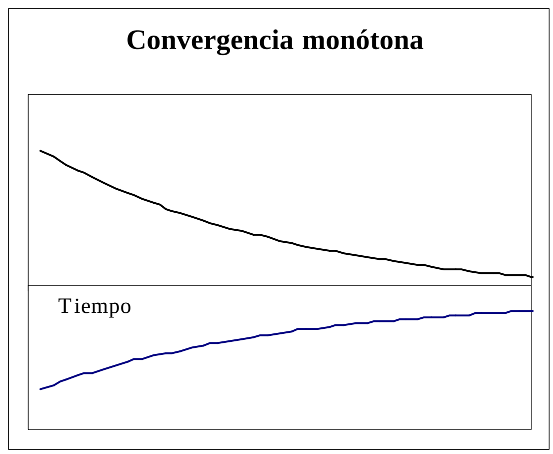
Este ejemplo sencillo demuestra que aun cuando las probabilidades de transición sean constantes, la distribución de la población entre los diferentes estados no resulta necesariamente constante. En este caso, el número de niños sanos va bajando desde los 10000 iniciales a 9500, luego 9425, luego 9414 y así sucesivamente. En la siguiente sección se analiza el patrón que siguen estas extrapolaciones o proyecciones si se las sigue un número suficiente de veces.

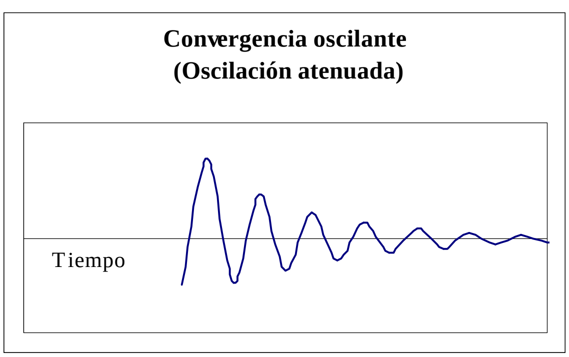
3.6. Convergencia y equilibrio

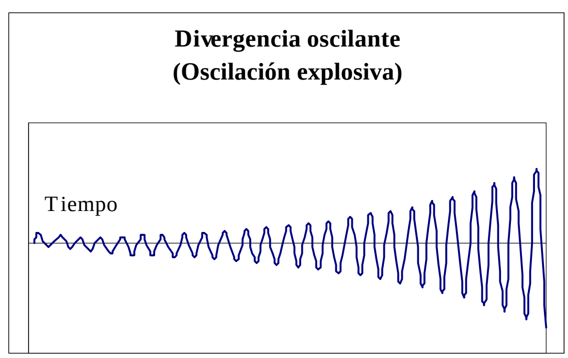
El proceso generado por la aplicación de una matriz de probabilidades de transición puede ser convergente, estable o divergente, y además puede ser monótono u oscilante, dando lugar a seis posibilidades. La siguiente tabla y el subsiguiente gráfico ilustran estas posibilidades.

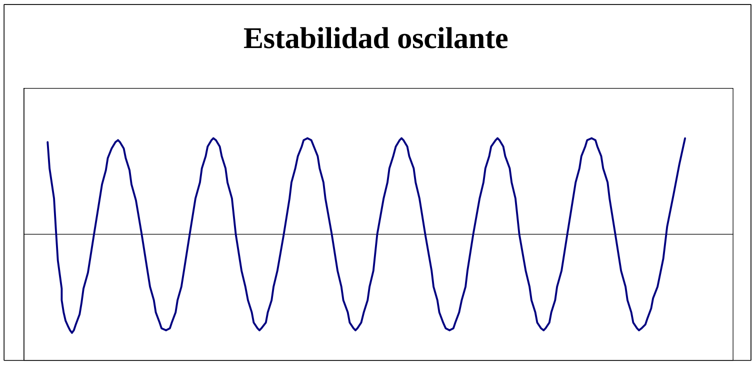
	Monótono	**Oscilante**
Convergente	Convergencia monótona	Oscilación atenuada
Estable	Equilibrio estable	Equilibrio oscilante
Divergente	Divergencia monótona	Oscilación explosiva











Si un sistema se encuentra inicialmente en equilibrio, permanece en equilibrio pues reproduce las magnitudes iniciales en todos los períodos subsiguientes. Si un sistema se encuentra inicialmente apartado de su punto de equilibrio, y el proceso es convergente, las magnitudes irán convergiendo hacia el equilibrio en forma gradual, ya sea en forma monótona o mediante una oscilación cada vez más atenuada.

En un proceso divergente, o con estabilidad oscilante, la distribución de sujetos nunca llegaría a estabilizarse en valores fijos. Si la variable es de tal naturaleza que ella puede asumir cualquier valor, incluso valores negativos, el proceso tiende a + o a - , mediante una divergencia monótona o mediante una oscilación explosiva. En cambio, si la variable está naturalmente constreñida a un cierto rango de valores (por ejemplo, el número de niños sanos o enfermos tiene que estar entre 0 y *N*), entonces la divergencia se detiene en uno u otro valor límite, o se vuelve oscilante. Más adelante, al considerar modelos de ecuaciones en diferencias finitas se analizarán las condiciones para la convergencia o divergencia de los procesos.

Cualquier proceso de este tipo, convergente o divergente, tiene un punto o situación de **equilibrio**. Si el proceso es convergente, se llega gradualmente a esa situación, en la cual hay una cierta cantidad de casos en cada estado (por ejemplo una cierta cantidad de niños sanos y enfermos) que se mantiene a lo largo del tiempo de allí en adelante. Si en el momento inicial reina ya la situación de equilibrio, las proporciones marginales se mantendrán indefinidamente. Si la situación inicial es otra, las proporciones irán evolucionando gradualmente hasta alcanzar la situación de equilibrio.

Suele hacerse una distinción entre equilibrio estable e inestable. En un equilibrio estable, cuando se produce una perturbación del equilibrio el sistema retorna al equilibrio gradualmente. En un equilibrio inestable, cualquier perturbación conduce a una evolución divergente. Los sistemas convergentes tienen equilibrio estable, los divergentes tienen o pueden tener puntos de equilibrio inestables.

Equilibrio en este caso significa **ausencia de cambios agregados**, pero no ausencia de cambios **individuales**. Aun en la situación de equilibrio habrá un cierto número de cambios de estado. Esto significa que, en equilibrio, las proporciones marginales son constantes, pero puede haber cambios de estado a nivel individual. En el ejemplo del examen médico de los niños, cada mes habrá una cierta cantidad de niños sanos que se enferman, pero se compensarán con una igual cantidad de niños enfermos que se sanan, de modo que el número de sanos y enfermos no variará de un mes al otro.

La condición que debe regir para que haya equilibrio, por lo tanto, es que el número niños sanos que se enferman cada mes resulte igual al número de niños enfermos que se sanan. La cantidad esperada de niños sanos que se enferman es el producto del número de niños sanos por la probabilidad de que los niños sanos se enfermen. De igual forma se expresa la cantidad esperada de niños enfermos que se sanan. En la situación de equilibrio debe regir entonces la siguiente igualdad:

$$N_s r_{se} = N_e r_{es}. \qquad \text{(Ec. 9)}$$

De esta relación necesaria de equilibrio entre los flujos opuestos de cambio de estado se desprende la proporción que deben tener entre sí las cantidades de sujetos en cada estado cuando se llegue al estado de equilibrio, cantidades que una vez alcanzadas serían constantes en el tiempo y se indican con un asterisco en lugar del superíndice ***t*** o ***t+1***:

$$\frac{N_s^*}{N_e^*} = \frac{r_{es}}{r_{se}} \qquad \text{(Ec. 10)}$$

Las probabilidades de sanar o de enfermar son, en este ejemplo, 0.80 y 0.05 respectivamente. Transponiendo términos se tiene una expresión que permite relacionar las probabilidades de transición antedichas con las cantidades de niños sanos y enfermos que debe haber en una situación de equilibrio:

$$\frac{N_s^*}{N_e^*} = \frac{r_{es}}{r_{se}} = \frac{0.80}{0.05} = 16$$

La razón de equilibrio entre niños sanos y niños enfermos debe ser igual a la razón entre la probabilidad de sanar y la probabilidad de enfermar. Esto significa que en este ejemplo el proceso en cuestión alcanzaría el equilibrio cuando la cantidad de niños sanos sea dieciséis veces más alta que la cantidad de niños enfermos, porque la probabilidad de sanar (0.80) es dieciséis veces mayor que la probabilidad de enfermar (0.05). Si el número total de niños es diez mil, esto se logra con 9411.77 niños sanos y 588.23 niños enfermos. Como los niños no pueden existir en forma fraccionaria, las cifras se redondean. Una vez que llegue a esa situación de equilibrio la población **esperada** de niños sanos y enfermos permanecería en torno a 9412 niños sanos y 588 enfermos, con pequeñas fluctuaciones no significativas debidas al redondeo. Si se recuerda que en sólo tres rondas después de la ronda inicial el número de niños sanos ya había descendido desde 10000 hasta 9414, cifra muy cercana a la de equilibrio

(9412), es obvio que en este ejemplo el equilibrio se alcanza muy rápidamente. De hecho se alcanzaría en el período siguiente. En efecto, en t=5 permanecerán sanos un 95% de los 9414 niños sanos, es decir 8943, y de los 586 enfermos sanará el 80%, es decir 469, dando un total de 9412 sanos y 588 enfermos. De allí en adelante el número de sanos permanecerá en 9412 y el de enfermos en 588, (salvo pequeñas fluctuaciones por redondeo).[2]

La siguiente secuencia muestra los resultados de las seis primeras observaciones mensuales, de t=1 hasta t=6. En esta secuencia se advierte que inicialmente los individuos que cambian de estado en un sentido no concuerdan con los que cambian de estado en sentido contrario. Pero posteriormente ambos flujos convergen a alrededor de 470 en cada sentido: 470 sanos se enferman, y 470 enfermos se sanan, de modo que la distribución global no cambia. Las celdillas sombreadas indican los flujos de cambio de estado en cada una de las fases mensuales, que se igualan entre sí al llegar a la situación de equilibrio.

	t = 2			**t = 3**			**t = 4**			**t = 5**			**t = 6**	
t=1	**S**	**E**	**t=2**	**S**	**E**	**t=3**	**S**	**E**	**t=4**	**S**	**E**		**S**	**E**
S	9500	500	**S**	9025	475	**S**	8954	471	**S**	8943	471		8942	470
E	-	-	**E**	400	100	**E**	460	115	**E**	469	117		470	118
	9500	500		9425	575		9414	586		9412	588		9412	588

Este ejemplo presuponía que al inicio los diez mil niños estaban sanos. Si en el momento inicial todos los niños hubiesen estado enfermos, o hubiese habido cualquier otra distribución intermedia, el proceso de convergencia hubiese sido

[2] La ecuación 10 sólo suministra el **cociente** entre las cantidades de sujetos que (en equilibrio) deben estar en cada estado. Para encontrar los valores absolutos de N_s y N_e , que en este caso son 9412 y 588 respectivamente, se debe usar también la información sobre el número total de sujetos, *N*. Para ello se formula el problema como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$N_s + N_e = N = 10000$$

$$N_s = 16 N_e$$

De estas ecuaciones se desprende la expresión que permite obtener la proporción de sanos o de enfermos en la situación de equilibrio (indicada con un asterisco):

$$p_s^* = \frac{N_s}{N_s + N_e} = \frac{N_s}{N} = \frac{r_{es}}{r_{se} + r_{es}}$$

$$p_e^* = \frac{N_e}{N_s + N_e} = \frac{N_e}{N} = \frac{r_{se}}{r_{se} + r_{es}}$$

similar. Cada mes se curaría el 80% de los enfermos y se enfermaría el 5% de los sanos, convergiendo al mismo estado de equilibrio al cabo de algunas rondas. La cantidad de rondas necesarias para alcanzar el equilibrio con suficiente exactitud dependerá de cuáles sean las condiciones iniciales. En el ejemplo se partía de 10000 sanos cuando en equilibrio debían ser 9412, de modo que ya la situación inicial estaba cerca del equilibrio. Si se hubiese partido de una situación muy alejada del equilibrio, por ejemplo con todos o casi todos los niños enfermos, el número de rondas necesario para llegar a la distribución de equilibrio (9412 niños sanos) hubiera sido mayor.

En este ejemplo, la convergencia hacia el estado de equilibrio es monótona, y procede por lo tanto en forma directa y gradual: las cantidades se van aproximando gradualmente a su punto de equilibrio sin ninguna oscilación. Eso es lo que ocurre cuando las probabilidades de transición más elevadas están situadas en la diagonal principal, es decir cuando hay una correlación o asociación directa entre el estado antecedente y el estado consecuente.

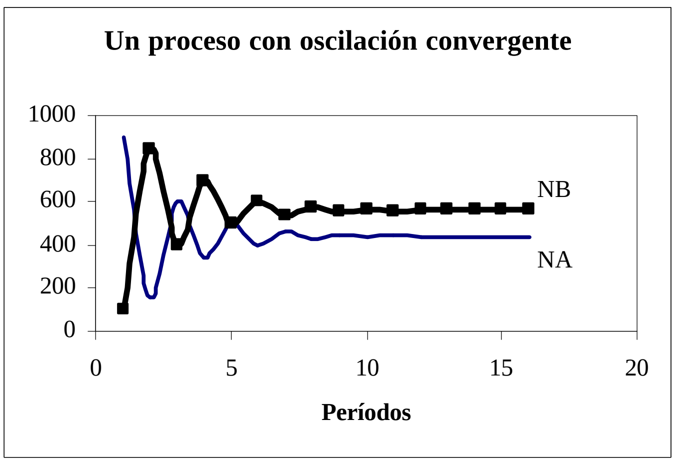
Cuando las probabilidades mayores están concentradas en la diagonal secundaria, es decir, cuando hay una asociación **inversa** entre el estado antecedente y el consecuente, el proceso de convergencia hacia el punto de equilibrio puede ser **oscilante**, aunque la amplitud de las oscilaciones va disminuyendo a medida que se avanza hacia el equilibrio. Por ejemplo, supóngase un proceso con dos estados A y B, cuya distribución inicial es N_A=900 y N_B=100, y cuya matriz de probabilidades de transición es la siguiente:

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

En este caso, la aplicación reiterada de estas probabilidades al vector inicial arroja la siguiente evolución en cuanto a la cantidad de gente en los dos estados. La tabla y gráfico siguientes ilustran la evolución de las cifras durante 16 períodos, evidenciando que el proceso converge de manera oscilante hacia sus valores de equilibrio.

Período	N_A	N_B
1	900	100
2	160	840
3	604	396
4	338	692
5	497	503
6	402	598

7	459	541
8	425	575
9	445	555
10	433	567
11	440	560
12	436	564
13	439	561
14	437	563
15	438	562
16	437	563



Aquí se puede ver cómo las cantidades oscilan con amplitud decreciente hasta converger a la distribución de equilibrio que se sitúa alrededor de un 43.7% en el estado A y un 56.3% en el estado B. Al llegar al período 16 el sistema ya está prácticamente en equilibrio, variando sólo marginalmente con cambios que no se pueden distinguir de los errores de redondeo.

Nótese también que en el ejemplo anterior la situación inicial [10000; 0] está muy cerca de la situación de equilibrio [9412; 578], y por consiguiente el equilibrio se alcanzaba en sólo tres o cuatro pasos. En cambio en el ejemplo último la situación inicial [900; 100] está muy alejada y hasta en relación inversa de las proporciones de equilibrio [437; 563] por lo cual alcanzar el equilibrio toma muchos más pasos intermedios.

3.7. Evaluación empírica del ajuste del modelo de Markov

No todos los datos de panel se ajustan a las previsiones de un modelo de Markov. Si se desea aplicar ese modelo será necesario verificar si se cumplen sus supuestos. El modo de hacerlo es verificar si las cifras esperadas (generadas por el modelo) coinciden con las observadas.

Es frecuente que se cuente con un panel breve, en el que se observen sólo dos o tres períodos. A menudo se usan los dos primeros períodos para estimar las probabilidades de transición, que luego se aplican para generar las cifras esperadas de los períodos subsiguientes. Pero no hay nada especial a priori en los dos primeros períodos, o en cualquier par de períodos que se elija para basar la estimación de las probabilidades. La estimación de las probabilidades de transición podría basarse, en realidad, en cualquier par de períodos arbitrariamente elegidos, o en un promedio de todos ellos. El modelo implica que esas probabilidades son constantes, de modo que **si el modelo de Markov es válido** todas esas variantes deberían arrojar más o menos los mismos resultados. La evaluación suele concentrarse en dos preguntas cruciales: (1) ¿Se encuentra el proceso en una situación de equilibrio? y (2) ¿Obedece el proceso al modelo markoviano con probabilidades de transición homogéneas y constantes?

3.7.1. Equilibrio y desequilibrio de corto plazo

Hay procesos que a priori se supone que no tienen ninguna tendencia definida, sino que se mantienen estables o casi estables. Esto significa que el proceso se encuentra permanentemente en equilibrio o muy cerca del equilibrio. En ese caso, cualquier par de períodos que se elija daría más o menos los mismos resultados. En otros casos existen **tendencias** de largo plazo o **movimientos cíclicos** que van modificando la distribución de la población, y por lo tanto los resultaos serían distintos según el par de períodos que se escoja. Por ejemplo, esto podría ocurrir en el caso del desempleo: en un período de expansión económica posiblemente sean más los desempleados que encuentran trabajo que las personas ocupadas que pierden su empleo, y a la inversa en un período de recesión. En un país cuyo sistema educativo está aumentando su eficacia, la proporción de desertores tenderá a disminuir con el tiempo, y por lo tanto la probabilidad de desertar observada hoy posiblemente sobreestime las deserciones escolares de mañana. La probabilidad de morir a determinada edad, registrada en un cierto período, posiblemente disminuya con el tiempo del mismo modo, si en el país hay una tendencia al descenso de las tasas de mortalidad.

Un panel con solo dos observaciones permite poner a prueba la hipótesis de que el proceso se encuentra ya en equilibrio. Si así fuese, **las frecuencias marginales deberían ser constantes** en los dos períodos, de modo que el número total de sujetos en cada uno de los estados debería ser invariable (o casi invariable) en los sucesivos períodos.

Obviamente no es imprescindible que las frecuencias marginales en ***t*** y en ***t+1*** sean exactamente iguales. Cualquier ajuste empírico debe contemplar la posibilidad de errores aleatorios, producidos por fluctuaciones al azar de los propios sujetos o por errores de medición. Por tal razón, verificar si hay equilibrio equivale a rechazar la hipótesis nula de que las dos distribuciones marginales provienen de poblaciones diferentes entre sí, a un cierto nivel de significación estadística. Esta prueba se realiza usualmente con los tests estadísticos más habituales como el $\div^2$ (chi cuadrado). Para ello se consideran las frecuencias de ***t+1*** como frecuencias "observadas" y las de ***t*** como "esperadas". Si la variable tiene ***k*** categorías, la evaluación se realiza con el test $\div^2$ con ***k-1*** grados de libertad, al nivel de significatividad elegido (usualmente p=0.95 o bien p=0.99. Dado que la hipótesis nula es que ambas distribuciones son **diferentes**, ella es rechazada cuando $\div^2$ es **inferior** al valor crítico, y aceptada cuando es superior a él (lo contrario de lo que ocurre usualmente en este tipo de prueba estadística). La prueba $\div^2$, sin embargo, presupone una distribución normal de errores de muestreo, y por lo tanto puede ser usada solamente en muestras al azar suficientemente grandes. Para muestras pequeñas o no aleatorias se deberían usar tests no paramétricos.

3.7.2. Evaluación del modelo

Si se dispone al menos de tres observaciones se podría poner a prueba la hipótesis, más importante, de que las cifras observadas son efectivamente generadas por un proceso subyacente de tipo markoviano, caracterizado por **probabilidades constantes de transición** entre un estado y otro. Los datos de los dos primeros períodos observados se pueden usar para estimar las probabilidades de transición, y con ellas predecir las cifras del tercer período; a la inversa, las probabilidades podrían estimarse a partir del segundo y tercer período para luego estimar retrospectivamente el primero. Si esas cifras esperadas coinciden cercanamente con las observadas, no se podría rechazar la hipótesis de que los datos hayan sido generados por un proceso subyacente del tipo que se ha expuesto. Esta comprobación adquiere más fuerza si se tienen cuatro o más períodos de observación, y las cifras esperadas coinciden cercanamente con las observadas para todos ellos. En caso que esas predicciones se aparten fuertemente de la realidad observada, será necesario otro modelo que contemple otros factores.

Una de las maneras de tratar este tema consiste en introducir **otras variables** que ayuden a predecir mejor los cambios, lo cual de hecho hace que las probabilidades de transición dejen de ser constantes y se vayan modificando con el correr del tiempo. Esto equivale a explorar la posibilidad de que las probabilidades de transición sean **heterogéneas**, es decir, que algunos subgrupos de individuos tengan probabilidades diferentes a otros subgrupos. Por ejemplo, podría ocurrir que las probabilidades de caer en el desempleo o de encontrar empleo varíen en función de la edad, el sexo o el nivel educativo de los trabajadores. En tal caso, la proporción de sujetos que pasa del estado ***i*** al estado ***j*** no sería una estimación correcta de r_{ij} para todos los sujetos, sino sólo el promedio ponderado de las probabilidades heterogéneas que están operando. Por otra parte, al actuar esas distintas probabilidades la composición de los contingentes en cuanto a esos factores va cambiando, y en consecuencia también cambiarán las proporciones promedio de pasaje de un estado a otro. Si en un panel con tres o más períodos se observa que las proporciones de pasaje van variando, tal vez esas variaciones puedan ser explicadas al subdividir el grupo total de acuerdo a variables relevantes.

Otro enfoque consiste en utilizar el concepto de "cohorte teórica" en lugar de hacer siempre referencia a cohortes empíricas o reales. Este enfoque en realidad no resuelve el problema sino que lo ignora, sin comprobar en momento alguno la adecuación del modelo de Markov, y sin comprobar la existencia o no de una situación de equilibrio. El enfoque de cohorte teórica toma las probabilidades obtenidas a partir de **diferentes cohortes empíricas** en un determinado intervalo, o en el promedio de varios intervalos adyacentes, y las utiliza para estimar la probable evolución de **una cohorte teórica** que a lo largo del tiempo estuviese sometida a las probabilidades estimadas a partir del panel.

El uso más frecuente de las cohortes teóricas es la construcción de tablas de vida o tablas de supervivencia. Pueden referirse al evento consistente en morir, o a eventos menos trascendentales como ingresar en la actividad económica o comprar un auto. Para el caso de la mortalidad se miden en un período determinado las tasas de mortalidad por edad y con ellas se estiman las probabilidades de morir en cada edad o tramo de edades (es decir las probabilidades de pasar del estado "Vivo a la edad ***t***" al estado "Muerto antes de la edad ***t+k***"), las cuales se aplican luego a una cohorte teórica, como si esas tasas afectaran a esa población teórica a lo largo de su vida. En este caso el "tiempo" es reemplazado por la "edad" (tiempo transcurrido desde el nacimiento) pero es siempre un caso de análisis longitudinal.

Aplicar las tasas de mortalidad que hoy afectan a personas de diferentes edades, a una cohorte de personas teóricas es un artificio teórico. En realidad, los niños de hoy nunca van a ser afectados por la mortalidad que hoy sufren los ancianos, pues cuando esos niños lleguen a la vejez las tasas de mortalidad en la vejez serán otras (posiblemente inferiores). Igualmente, los ancianos de hoy nunca fueron afectados por la mortalidad infantil de hoy, pues cuando ellos eran niños las tasas de mortalidad infantil eran otras (probablemente muy superiores a las de hoy). La expectativa de vida que surge de una tabla de mortalidad equivale a la cantidad de años vividos por una población teórica sometida a lo largo de su vida a las tasas de mortalidad por edad vigentes hoy, pero no puede aplicarse directamente para estimar la cantidad de años que van a vivir los niños nacidos hoy. La mayoría de los modelos aplicados a las "historias de eventos" se basan en este concepto de cohorte teórica.

Un tercer enfoque postula un proceso mixto. Los sujetos, de acuerdo a este enfoque, están guiados por dos procesos diferentes y simultáneos: por una parte, ciertas probabilidades homogéneas y constantes de transición, es decir una matriz markoviana de probabilidades de transición; y otro lado, un proceso de shocks aleatorios que lo llevan a dar respuestas diferentes a las que corresponderían de acuerdo al proceso markoviano. El problema del analista es distinguir los verdaderos cambios de estado del sujeto (supuestamente gobernados por un proceso de Markov) de los cambios aparentes o momentáneos inducidos por esos factores aleatorios.

Para poder tratar con mayor rigor estos problemas es necesario pasar más allá de los datos de panel a fin de postular un modelo teórico sobre los procesos no observables que tienen lugar en el nivel de los individuos, y que estarían generando los datos observados. Estos modelos teóricos, por lo general, presuponen procesos que operan en forma **continua**, aun cuando el panel se repita a intervalos discretos en el tiempo.

4. Procesos continuos con variables categóricas

Los modelos de Markov se basan en variables de tipo categórico o cualitativo, y por lo tanto suponen que existen varios estados claramente distintos (es decir, **estados discretos**). Al mismo tiempo esos modelos markovianos únicamente registran el estado de las unidades de análisis en determinados momentos separados por un intervalo. El proceso de Markov explica los cambios ocurridos entre dos (o más) rondas, de modo que también **el tiempo es tratado de hecho como una variable discreta**. No hace referencia al período intermedio.

Hay procesos que son, sin duda, de ese carácter. La agricultura, por ejemplo, es un proceso anual: en cierto momento se siembra, y en cierto momento se cosecha. No hay una producción continua ni una siembra continua. Lo mismo pasa con la educación formal: en un cierto mes comienzan las clases, y en cierto mes termina el año escolar y se otorgan certificados de completamiento de cada nivel de enseñanza. No hay un proceso permanente de ingreso de alumnos ni un proceso permanente de egreso y graduación, sino que esos eventos ocurren sólo en determinados momentos del año.

Sin embargo, el modelo explicativo subyacente al análisis de un panel mediante modelos de Markov no implica necesariamente que el tiempo sea concebido como una sucesión de instantes discretos. Aun cuando las observaciones se realicen en momentos discretos, la interpretación puede basarse en la postulación de **procesos que operan en forma continua**. Muchos procesos, de hecho, tienen ese carácter, como por ejemplo el proceso de cambios en la situación ocupacional de las personas: en cada instante hay personas que ingresan en la actividad económica, personas que encuentran empleo, personas que pierden su empleo.

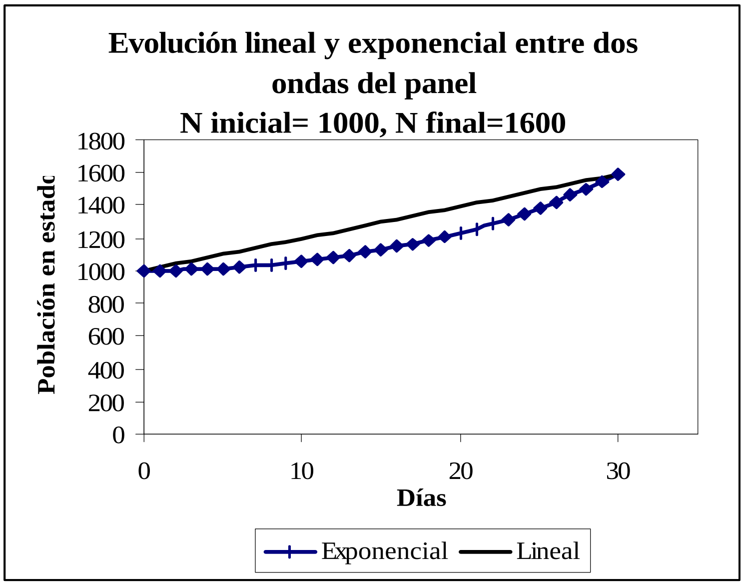
Para reflejar esta clase de procesos son necesarios ciertos modelos formales que suponen un cambio continuo en la situación de las unidades de análisis. Cuando se trata de variables categóricas, ese cambio continuo significa que permanentemente hay algunas personas que cambian de estado en un sentido o en otro. El cambio observado entre dos rondas de un panel es el **resultado neto** de una serie de cambios a nivel individual ocurridos durante el período intermedio de manera continua.

Esto significa que los cambios agregados que se observan entre dos rondas son el resultado de una acumulación de cambios individuales. Por ello el tratamiento de este tema de una manera rigurosa aconseja separar conceptualmente por un lado la **proporción agregada** de sujetos que pasan de un estado a otro en un intervalo de determinada longitud, deducida de las frecuencias en el panel, y por otro lado la **probabilidad individual** de pasar de un estado a otro (que puede estar definida para el mismo intervalo o para un intervalo cualquiera elegido como unidad de tiempo). En tal sentido, el modelo se refiere primariamente a los procesos que ocurren a nivel individual, cuyos parámetros, a menudo inobservables, son estimados a partir de los datos del panel; posteriormente, las proporciones y magnitudes de los flujos agregados que se acumulan en los períodos empíricos, de longitud arbitraria, entre dos rondas del panel, se explican a partir de los parámetros del modelo.

4.1. Tasas instantáneas de transición

La arbitraria longitud del intervalo entre rondas hace que la estimación de la probabilidad de transición entre rondas encierre un elemento de arbitrariedad. Obviamente, al aumentar la longitud del intervalo es probable que aumente la proporción de sujetos que ha cambiado, pero ello no significa que haya cambiado la probabilidad subyacente de cambiar de estado. Por ejemplo, la proporción de sujetos casados que se divorcian antes de la ronda siguiente será mayor cuanto más largo sea el intervalo entre las rondas, lo mismo que la cantidad de solteros que contrae matrimonio. Si se prolonga el intervalo la probabilidad de casarse o de divorciarse parecerá aumentar, aunque la tasa anual o mensual de divorcios y casamientos no haya cambiado en absoluto.

Generalmente esta arbitrariedad puede superarse estimando la **trayectoria** de las magnitudes a lo largo del período intermedio entre dos rondas. En el gráfico siguiente aparece así la cantidad de sujetos en el estado ***i*** en dos rondas (1 y 2), y dos posibles trayectorias de los cambios ocurridos durante el intervalo intermedio. Supóngase que el tiempo se mide en unas unidades de medida cualesquiera, por ejemplo días, y que las dos rondas están separadas por un intervalo ***Ät*** equivalente a una cierta cantidad de días, por ejemplo un mes (30 días). El panel ha revelado que en un cierto estado ***i*** había 1000 personas en la primera ronda, y 1600 en la ronda siguiente realizada 30 días después de la primera. El gráfico siguiente muestra dos posibles trayectorias de esta población a lo largo del mes, entre su estado inicial y su estado final. El aumento ha ocurrido durante ese mes, pero se desconoce cómo se distribuyó a lo largo del mes. El número de personas en el estado ***i*** pudo haber aumentado en forma gradual, o pudo haber oscilado ampliamente por encima y por debajo del valor inicial. Para estimar la trayectoria usualmente (a falta de otros datos) se supone un cambio gradual. Esto puede operacionalizarse como un **número constante** de aumento por día (interpolación lineal), o una **proporción constante** de aumento por día (interpolación exponencial).



En la interpolación lineal se supone que el número de sujetos en el estado ***i*** aumenta de manera lineal, con un **incremento fijo en términos absolutos** por unidad de tiempo. En la interpolación exponencial se supone que el número de sujetos en el estado ***i*** aumenta en una **proporción fija** por unidad de tiempo. Las ecuaciones que representan ambas trayectorias a lo largo de un intervalo de longitud Ät son las siguientes, que estiman el contingente de sujetos en el estado ***i*** en cualquier instante intermedio ***t+h*** del intervalo total ***t+*** Ät, donde ***h*<**Ät.

Incremento lineal: $$N_i^{t+h} = N_i^t + bh = N_i^t + \left[\frac{N_i^{t+\Delta t} - N_i^t}{\Delta t}\right]h \qquad \text{(Ec.11)}$$

Incremento exponencial: $$N_i^{t+h} = N_i^t (1+r)^h = N_i^t \left[\sqrt[\Delta t]{\frac{N_i^{t+\Delta}}{N_i^t}}\right]^h \qquad \text{(Ec. 12)}$$

Los dos parámetros fundamentales son, en el caso lineal, el incremento fijo ***b*** por unidad de tiempo, que en nuestro ejemplo es simplemente el incremento mensual absoluto dividido por el número de días en el mes; y en el caso exponencial el factor diario acumulativo de incremento ***1+r***, que es igual a la raíz 30-ésima del incremento relativo mensual. Estas ecuaciones generan la cantidad estimada de personas en el estado ***i*** en cada uno de los días del mes transcurrido (***h*** = 1, 2, 3, ... , 30).

En el gráfico precedente las dos trayectorias arrojan valores diferentes de N_i a lo largo del mes, especialmente hacia la mitad del mes cuando ambas líneas están más separadas. Esta diferencia será más significativa cuanto más grande sea el incremento mensual. Cuando la diferencia entre la cifra inicial y final es relativamente pequeña, las dos trayectorias tenderán a ser muy coincidentes entre sí. Cuando el incremento entre rondas haya sido más acentuado, la trayectoria exponencial tenderá a apartarse más perceptiblemente de la trayectoria lineal.

El intervalo que separa dos rondas de una encuesta de panel es en general arbitrario. En un proceso de cambio continuo no hay en principio nada especial en un intervalo de cuatro, seis u ocho meses.[3] Los parámetros de un modelo teórico sobre un proceso subyacente de cambio que se opera en forma continua a nivel de los individuos no pueden depender de la elección arbitraria de un intervalo: ninguna teoría significativa sería capaz de incorporar como parámetro teórico la probabilidad de quedar desocupado en un lapso de, por ejemplo, ocho meses. En cambio, muchos modelos teóricos se basan en el supuesto de un **proceso continuo**, que opera en cada instante del tiempo, de modo que los cambios operados en un intervalo entre rondas puede considerarse como el **efecto acumulado de un proceso continuo** que estuvo funcionando todo el tiempo durante todo ese intervalo.

Para formular un modelo de cambio continuo, con estados discretos y tiempo continuo, se necesita definir una magnitud llamada "intensidad de transición" o "tasa instantánea de transición" (véase Coleman 1964b, cap. 3 a 5). La intensidad de transición entre dos estados **i** y **j** se denota como q_{ij}. Estas magnitudes no son probabilidades sino tasas de variación; sus valores posibles no están limitados al intervalo (0, 1), y se definen primariamente a nivel **individual**. La tasa instantánea de transición q_{ij} puede ser definida a partir de la probabilidad de transición acumulada a lo largo de un intervalo, **suponiendo un flujo exponencial a lo largo del tiempo.** Denotando como $r_{ij}^{t,t+h}$ la probabilidad de transición desde ***i*** hacia ***j*** acumulada a lo largo de un intervalo de longitud ***h***, se obtienen la siguiente expresión para la tasa instantánea de transición desde ***i*** hacia ***j***:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{ij}^{t,t+h}}{h} = q_{ij} \quad (i \neq j) \qquad \text{(Ec.13)}$$

Es fácil advertir que las q_{ij} son las derivadas de las proporciones $r_{ij}^{t,t+h}$ relativas al intervalo ***h***, cuando la longitud de dicho intervalo tiende a cero.[4]

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{ij}^{t,t+h}}{h} = \frac{dr_{ij}^{t,t+dt}}{dt} = q_{ij} \qquad (i \neq j) \qquad \text{(Ec.14)}$$

[3] La elección del período no es arbitraria en los procesos que no ocurren en forma continua, sino a saltos en intervalos discretos, como por ejemplo el avance de los estudiantes en un sistema escolar, organizado en grados anuales, donde los cambios (pasar de grado o graduarse) ocurren una vez por año, en fechas determinadas, y no en forma continua. Lo mismo ocurre en la producción agrícola donde las cosechas ocurren con ciclos anuales.

[4] Esta es una propiedad conocida de los procesos estocásticos de este tipo. Véase Doob, 1953, p.239, y Coleman, 1964b, pp.129-130.

Esto significa que la tasa instantánea de transición es igual al incremento de la probabilidad de transición durante el intervalo ***h***, cuando ***h*** aumenta en una magnitud infinitesimal. En el caso de la tasa de transición q_{ii}, que implica permanecer en el estado ***i***, la tasa instantánea de transición es simplemente la suma (cambiada de signo) de los flujos hacia otros estados:

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} \qquad \text{(Ec. 15)}$$

Esto es así porque q_{ii} equivale al total de sujetos que estaba en el estado ***i*** menos la suma de todos los sujetos que pasaron desde ***i*** a otros estados. La suma de las tasas q_{ij} que parten del estado ***i*** hacia distintos estados ***j*** puede expresarse como 1 menos la tasa q_{ii}.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - r_{ii}^{t,t+h}}{h} = \frac{-dr_{ii}}{dt} = \sum_{j \neq i} q_{ij} \qquad \text{(Ec. 16)}$$

de donde la definición de q_{ii} se deduce inmediatamente. El uso de estas tasas instantáneas facilita el tratamiento de los paneles cuyos intervalos de espaciamiento no son uniformes. También permite estimar la incidencia de **eventos intermedios** ya que se supone que operan de manera continua durante el intervalo entre rondas. La comparación de las probabilidades de transición entre distintos pares de rondas sucesivas no puede hacerse legítimamente cuando las rondas han sido realizadas con diferentes intervalos. La estimación de las tasas instantáneas que se supone han generado esas transiciones acumuladas a lo largo del intervalo permite superar esa dificultad, ya que las refiere a un intervalo infinitesimal de tiempo indepediente de la longitud empírica del intervalo entre rondas del panel.

El cambio de un contingente N_i por unidad de tiempo puede, de modo similar, ser expresado en términos de las tasas instantáneas de variación. Supóngase que hay sólo dos estados, ***i*** y ***j***, y que el estado ***j*** es un estado "terminal", de modo que no hay ningún flujo desde ***j*** hacia ***i***. En este caso se tiene para un intervalo infinitesimal de tiempo ***dt***:

$$\frac{dN_i^t}{dt} = -q_{ij} N_i^t \qquad \text{(Ec. 17)}$$

Integrando esta derivada en el intervalo desde ***t*** hasta ***t+h*** se puede deducir la expresión que da el contingente en el estado ***i*** en un momento cualquiera ***t+h*** en función del contingente inicial en el momento ***t*** y la tasa instantánea de transición.

$$N_i^{t+h} = N_i^t e^{-q_{ij} h} \qquad \text{(Ec. 18)}$$

Esta expresión, sin embargo, refleja el flujo de salida desde el estado ***i*** pero suponiendo que no hay un correlativo flujo de entrada. Si además existe un flujo desde ***j*** hacia ***i***, la derivada del contingente en el estado ***i*** es dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{dN_i^t}{dt} = q_{ji} N_j^t - q_{ij} N_i^t \qquad \text{(Ec. 19)}$$

La integración de esta función sobre el intervalo (***t, t+h***), tomando en cuenta el hecho de que $N_j = N\text{-}N_i$, arroja una expresión para el contingente esperado en el estado ***i*** en el momento ***t+h*** tomando en cuenta los flujos de entrada y salida entre los estados ***i*** y ***j***.[5]

$$N_{ei}^{t+h} = N \frac{q_{ji}}{q_{ji} + q_{ij}} + \left[N_i^t - N \frac{q_{ji}}{q_{ji} + q_{ij}} \right] e^{-h(q_{ji}+q_{ij})} \qquad \text{(Ec. 20)}$$

El segundo miembro de la derecha tiende a cero si ***h*** tiende a infinito, y por lo tanto el valor de largo plazo (que es el valor de equilibrio del sistema) equivale al primer miembro:

$$\lim_{h \to \infty} N_{ei}^{t+h} = N_{ei}^* = N \frac{q_{ji}}{q_{ji} + q_{ij}} \qquad \text{(Ec. 21)}$$

donde el asterisco indica el tamaño esperado del contingente N_i en la situación de equilibrio. Dado que con dos estados posibles será $N_i+N_j=N$, se ve fácilmente que el contingente esperado de equilibrio en el estajo ***j***, es decir N_{ej}^*, viene dado por:

$$N_{ej}^* = N \left[1 - \frac{q_{ji}}{q_{ji} + q_{ij}} \right] = N \frac{q_{ij}}{q_{ji} + q_{ij}} \qquad \text{(Ec. 22)}$$

Estas expresiones para calcular la magnitud de equilibrio de los contingentes en cada estado (o su proporción respecto a *N*) también podrían deducirse a partir de la expresión de la derivada de N_i, si se la hace igual a cero, pues en un estado de equilibrio el contingente en cualquier estado debería permanecer constante a lo largo del tiempo:

$$q_{ji} N_{ej}^* - q_{ij} N_{ei}^* = 0 \qquad \text{(Ec. 23)}$$

A partir de esta ecuación, por simple transposición de términos y recordando que $N_j=N\text{-}N_i$ se obtienen las mismas expresiones anteriores (Ec. 21 y 22) para N_{ei}^* y para N_{ej}^*.

[5] La derivación de esta expresión, que aquí se omite por brevedad, puede encontrarse en Coleman, 1964b, apéndice 2 del cap. 4, p.131.

4.2. Estimación empírica de las intensidades de transición

Dado que las intensidades de transición q_{ij} son tasas instantáneas, que se definen en función del límite de las probabilidades de transición durante un intervalo cuando ese intervalo tiende a cero, su cálculo empírico no es inmediato. En esta sección se analiza primero el caso de una variable dicotómica, donde el cálculo es relativamente más fácil, y luego el caso de una variable con más de dos categorías.

4.2.1. Caso de variables dicotómicas

Supóngase que se dispone de dos ondas de panel realizadas en las fechas ***t*** y ***t+h***. La aplicación de un modelo que postula un proceso continuo de cambio entre los dos estados de una variable dicotómica exige calcular las tasas instantáneas de transición q_{ij} y q_{ji}. Un cálculo aproximado de esas tasas instantáneas de transición para el caso de una variable dicotómica puede basarse en la ecuación 18:

$$N_i^{t+h} = N_i^t e^{-q_{ij}h}$$

Aplicando logaritmos naturales se desprende:

$$ln\frac{N_i^{t+h}}{N_i^t} = -q_{ij}h$$

A partir de lo cual se puede estimar inmediatamente:

$$q_{ij} = \frac{lnN_i^t - lnN_i^{t+h}}{h} \qquad \text{(Ec. 24)}$$

Esta estimación, sin embargo, es sólo aproximada o gruesa. Considera los flujos desde ***i*** hacia ***j*** pero no los flujos en sentido contrario. Incluye por lo tanto los sujetos que en el momento ***t*** eran miembros del estado ***i*** y que estaban en el estado ***j*** en el momento ***t+h***, pero no incluye los que estaban en ***j*** en el momento ***t*** y fueron hallados en ***i*** al momento ***t+h***, ni tampoco incluye las "transiciones revertidas" o "rebotes", es decir los que pasaron de ***i*** a ***j*** durante ese mismo intervalo pero luego volvieron a pasar a ***i*** antes de terminar el intervalo. Si todos los sujetos tienen las mismas probabilidades de transición en cada instante, entonces algunos de los que cambiaron de estado durante el período intermedio probablemente retornen a su estado inicial antes que llegue la próxima ronda. Podrían incluso cambiar varias veces de estado a lo largo del período, antes de llegar al estado en que se encontraban en el momento ***t+h***. Unas tasas instantáneas de transición q_{ij} que reflejan un proceso continuo deben ser estimadas teniendo en cuenta estas posibilidades, pues de otro modo subestimarían el flujo de ***i*** hacia ***j*** al no incluir aquellas personas que hicieron ese cambio pero luego volvieron a ***i***.

Para realizar una estimación exacta es necesario introducir algunos ajustes en la notación. Así como anteriormente se había definido N_{ei}^{t+1} como cantidad esperada de sujetos que están en el estado ***i*** en el momento ***t+1***, ahora definiremos $N_{eij}^{t,t+h}$ como la cantidad esperada de sujetos que, habiendo estado en el estado ***i*** en el momento ***t***, se encontrarán en el estado ***j*** en el momento ***t+h***. Esta magnitud no coincide necesariamente con la anterior, porque entre los sujetos que se espera encontrar en el estado ***j*** en el momento ***t+h*** hay algunos que no estaban en el estado ***i*** en la onda anterior.

En la ecuación 20 se encontró una expresión del número esperado de personas en un estado cualquiera ***i*** en el momento ***t+h***:

$$N_{ei}^{t+h} = N\frac{q_{ji}}{q_{ji}+q_{ij}} + \left[N_i^t - N\frac{q_{ji}}{q_{ji}+q_{ij}}\right]e^{-h(q_{ji}+q_{ij})}$$

Para mayor claridad se transponen y reagrupan algunos términos:

$$N_{ei}^{t+h} = N\frac{q_{ji}}{q_{ji}+q_{ij}}\left(1-e^{-h(q_{ji}+q_{ij})}\right) + N_i^t e^{-h(q_{ji}+q_{ij})} \qquad \text{(Ec. 25)}$$

Esta ecuación muestra más claramente que el número total esperado en el estado ***i*** en el momento ***t+h***, se compone de dos subgrupos: los que en el tiempo ***t*** estaban en el estado ***j***, y acabaron en el estado ***i***, que se denotan como $N_{eji}^{t,t+h}$, y que corresponden al primer término de la derecha en la ecuación 25, y por otra parte los que desde el inicio estaban en el estado ***i*** donde reaparecen en el momento ***t+h***, y que se denotan como $N_{eii}^{t,t+h}$. El último término de la ecuación 25 se refiere específicamente a este último subgrupo. Si la ecuación 25 se formula para estos dos subgrupos separadamente, resultan las siguientes expresiones:

$$N_{eii}^{t+h} = N_i^t\frac{q_{ji}}{q_{ji}+q_{ij}}\left(1-e^{-h(q_{ji}+q_{ij})}\right) + N_i^t e^{-h(q_{ji}+q_{ij})} \qquad \text{(Ec. 26)}$$

$$N_{eji}^{t+h} = N_j^t\frac{q_{ji}}{q_{ji}+q_{ij}}\left(1-e^{-h(q_{ji}+q_{ij})}\right) + 0 \qquad \text{(Ec. 27)}$$

La ecuación 26 puede ser dividida por N_i^t en ambos miembros, convirtiéndose en una expresión para $\boldsymbol{r_{ii}}$, mientras que la ecuación 27 puede ser dividida por N_j^t obteniéndose una expresión de $\boldsymbol{r_{ji}}$. Luego se resta la segunda de la primera, con lo cual se obtiene:

$$r_{ii} - r_{ji} = e^{-h(q_{ij}+q_{ji})} \qquad \text{(Ec. 28)}$$

Aplicando logaritmos y despejando $q_{ij}+q_{ji}$ resulta:

$$q_{ij} + q_{ji} = -\frac{ln(r_{ii} - r_{ji})}{h} \qquad \text{(Ec. 29)}$$

Substituyendo las ecuaciones 28 y 29 en la ecuación 27 se obtiene:

$$q_{ji} = \left(\frac{r_{ji}}{r_{ij} + r_{ji}}\right)\left(\frac{-ln(1 - r_{ii} - r_{ji})}{h}\right) \qquad \text{(Ec. 30)}$$

De modo similar se obtiene la expresión correspondiente a q_{ij}:

$$q_{ij} = \left(\frac{r_{ij}}{r_{ij} + r_{ji}}\right)\left(\frac{-ln(1 - r_{ii} - r_{ji})}{h}\right) \qquad \text{(Ec. 31)}$$

Las probabilidades r_{ij} que figuran en las ecuaciones 30 y 31 son cantidades directamente estimadas a partir de los flujos obtenidos empíricamente en el panel:

$$r_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i^t} \qquad\qquad r_{ji} = \frac{N_{ji}}{N_j^t}$$

De esta manera se pueden obtener estimaciones de las tasas instantáneas de transición a partir de los datos de dos rondas del panel, suponiendo un proceso continuo de flujos y reflujos a lo largo del período intermedio entre las dos rondas. Estas estimaciones no serán por lo general iguales a las estimaciones aproximadas (que no toman en cuenta los reflujos) que pueden ser obtenidas por medio de la ecuación 24.

Si se dispone de un panel con varias rondas, la elección de un determinado par de rondas para basar este cálculo sería arbitraria. La adopción de un modelo teórico con tasas de transición constantes implica postular que las probabilidades empíricamente estimadas con cada par de ondas son sólo diferentes **estimaciones muestrales de las mismas probabilidades subyacentes**, de modo que se podría tomar como base no ya un par de ondas determinadas sino el promedio de todos los pares adyacentes de ondas. En otras palabras, el flujo N_{ij} se obtendría como promedio de los flujos observados entre las ondas 1 y 2, entre las ondas 2 y 3, etc., siempre que se piense que las condiciones de contexto no han cambiado, y que por lo tanto el mismo proceso está operando en todos los períodos. Esta hipótesis puede corroborarse analizando la significatidad de las diferencias entre las tablas de rotación univariadas obtenidas para los distintos períodos 1-2, 2-3, 3-4, etc. Si el mismo proceso subyacente determina los flujos de todos los períodos, entonces las probabilidades observadas en todos ellos no deberían diferir mucho entre sí. En caso que difieran significativamente, el analista puede escoger entre analizar los subperíodos separadamente (por ejemplo períodos de auge económico por un lado y períodos de recesión por otro, si se trata de un panel sobre empleo y desempleo), o bien desarrollar un modelo más complejo donde las tasas de transición no sean constantes sino que varíen de acuerdo a la evolución de determinados factores.

Los resultados anteriores se refieren únicamente al caso de un atributo dicotómico donde los únicos estados posibles son ***i*** y ***j***. En la sección siguiente se ofrece un procedimiento de tipo iterativo para calcular las tasas q_{ij} en el caso general de variables discretas que pueden tener más de dos categorías.

4.2.2. Caso de variables politómicas

Cuando la variable tiene más de dos categorías existen **múltiples trayectorias** que pueden haber determinado el flujo neto observado en el panel. El contingente N_{ij} incluye los que pasaron directamente de ***i*** a ***j*** pero también los que atravesaron el estado intermedio ***k***, más los que atravesaron los estados intermedios ***k*** y ***g***, más los que pasaron directamente de ***i*** a ***k*** pero luego volvieron a ***i*** y finalmente pasaron a ***j***, e innumerables posibilidades más. Habrá sujetos que cambiaron "sin escalas", otros "con una escala intermedia", "con dos escalas", etc. El número de "escalas" en la trayectoria de cada individuo que haya pasado en definitiva de ***i*** a ***j*** puede variar desde el salto directo hasta diversas trayectorias más complicadas, con 1, 2, 3 o más estados intermedios, y cada uno de estos grupos puede haber pasado por diferentes trayectorias de dos escalas, o diferentes trayectorias de tres escalas, etc. Esto hace que no exista una fórmula directa de cálculo de q_{ij} en este caso, y que las estimaciones deban ser obtenidas por medio de una serie indefinida de iteraciones o aproximaciones sucesivas.

Si las fechas de dos rondas de panel son ***t*** y ***t+h***, y la variable investigada tiene ***m*** categorías, conociendo las tasas instantáneas de transición q_{ij} se podría estimar el vector fila N_{t+h} de cantidades **esperadas** de sujetos en los ***m*** estados en el momento ***t+h*** a partir del vector fila N_t de las cantidades iniciales de sujetos en los diferentes estados en el momento ***t***, y de la matriz **Q** de tasas instantáneas de transición q_{ij}**,** mediante un sistema de ecuaciones cuya notación matricial es la siguiente:

$$N_{t+h} = N_t e^{Qh} \qquad \text{(Ec. 32)}$$

Si ambos miembros, es decir cada elemento de los vectores N_t y N_{t+h}, se dividen por *N,* el mismo sistema de ecuaciones se refiere al vector *P* de las probabilidades de estado. Conociendo las q_{ij} se podrían estimar las probabilidades de estado del momento ***t+h*** a partir de las probabilidades de estado de momento ***t***:

$$P_{t+h} = P_t e^{Qh} \qquad \text{(Ec. 32 bis)}$$

El producto Qh es el producto de un escalar (h) por cada elemento de la matriz Q, de modo que Qh es una matriz cuyos elementos son $\boldsymbol{hq_{ij}}$. El exponencial e^{Qh} equivale al límite de la serie infinita siguiente:

$$e^{Qh} = 1 + Qh + \frac{Q^2h^2}{2!} + \frac{Q^3h^3}{3!} + \frac{Q^4h^4}{4!} + \ldots \qquad \text{(Ec. 33)}$$

Si se dispusiera de la matriz Q de tasas de transición instantáneas, la ecuación 33 proveería la matríz e^{Qh} que, con la ecuación 32, permitiría estimar el vector N_{t+h} a partir del vector inicial N_t. Pero estas dos ecuaciones **pueden también ser usadas en sentido contrario**, para estimar Q sobre la base de dos rondas del panel que hayan suministrado una tabla de rotación, es decir, que haya provisto estimaciones muestrales de los flujos de transición entre estados, N_{ij} así como sobre los contingentes en cada estado en la primera y la segunda ronda, N_t y N_{t+h}. Consideremos para ello sólo una parte de la población del panel, a saber, los N_i^t individuos que en el momento ***t*** se encontraban en el estado ***i***. Cuando sólo esos sujetos son considerados, el vector N_t está compuesto de ceros, excepto para el estado ***i*** donde figuran N_i^t individuos:

$$N_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & N_i^t & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Correlativamente, si siempre nos referimos a la población que estaba en ***i*** en el momento inicial, el vector N_{t+h} contendrá sólo aquellos sujetos que en el momento ***t*** se encontraban en el estado ***i***, agrupados según el estado en que se encontraban en ***t+h***. En otras palabras, los elementos del vector N_{t+h} serán los contingentes que anteriormente hemos denominado $N_{eij}^{t,t+h}$, esto es, la cantidad esperada de sujetos que, habiendo estado en ***i*** en el momento ***t***, se encuentran en el estado ***j*** en el momento ***t+h***:

$$N_{t+h} = \begin{bmatrix} N_{ei1}^{t,t+h} & \ldots & N_{eij}^{t,t+h} & \ldots & N_{eim}^{t,t+h} \end{bmatrix}$$

Cada elemento de este vector, según surge de las ecuaciones 32 y 33, es una serie infinita cuyos primeros términos son:

$$N_{eij}^{t,t+h} = N_i^t \left[d_{ij} + hq_{ij} + \frac{h^2}{2!} \sum_a q_{ia} q_{aj} + \frac{h^3}{3!} \sum_a \sum_b q_{ia} q_{ab} q_{bj} + \ldots \right] \qquad \text{(Ec. 34)}$$

donde el símbolo $ä_{ij}$ es la delta de Kronecker, que vale 1 si es $i=j$ y vale 0 si es i j. Si la variable tiene ***m*** estados, habrá ***m*** series de este tipo para cada uno de los ***m*** estados iniciales, es decir que habrá en total ***m²*** series que permiten estimar otros tantos flujos del tipo $N_{eij}^{t,t+h}$. Si cada ecuación se divide por N_i^t se obtiene una formulación equivalente para las probabilidades de transición entre el momento ***t*** y el momento ***t+h***:

$$r_{eij}^{t,t+h} = d_{ij} + hq_{ij} + \frac{h^2}{2!}\sum_a q_{ia}q_{aj} + \frac{h^3}{3!}\sum_a\sum_b q_{ia}q_{ab}q_{bj} + \ldots \quad \text{(Ec. 34 bis)}$$

Si se estiman las probabilidades de transición $r_{ij}^{t,t+h}$ a partir de los datos empíricos, estos resultados pueden usarse para estimar iterativamente las tasas de transición ***q_{ij}***. Para ello, en primer lugar, se adopta por simplicidad la convención que el intervalo entre las ondas del panel sea la unidad de medida del tiempo: ***h=1***. Esto significa que todos los numeradores del tipo h^u en la ecuación 34 resultan iguales a 1 (esta simplificación puede levantarse sin dificultad alguna si se desea usar otra unidad de medida del tiempo). La ecuación 34 se divide por N_i^t y se transponen términos para despejar ***q_{ij}***. Dado que la tasa ***q_{ii}*** equivale a la suma de flujos hacia otros estados cambiada de signo (Ecuación 14), ella no necesita ser estimada, por lo cual este procedimiento sólo se aplica a las tasas entre estados diferentes (*i j*), por lo cual el término con la delta de Kronecker se anula. En definitiva obtenemos para cada una de las ***m(m-1)*** tasas de transición entre estados diferentes una expresión en serie de este tipo:

$$q_{ij} = r_{ij}^{t,t+1} - \frac{1}{2!}\sum_a q_{ia}q_{aj} - \frac{1}{3!}\sum_a\sum_b q_{ia}q_{ab}q_{bj} + \ldots \quad (i \;\; j) \qquad \text{(Ec. 35)}$$

El primer término en el miembro de la derecha es la probabilidad de que un individuo situado en el estado ***i*** en el momento ***t*** aparezca en el estado ***j*** en el momento ***t+1***, y puede ser estimada mediante los datos empíricos como se indica en la versión siguiente de la ecuación:

$$q_{ij} = \frac{N_{ij}^{t,t+1}}{N_i^t} - \frac{1}{2!}\sum_a q_{ia}q_{aj} - \frac{1}{3!}\sum_a\sum_b q_{ia}q_{ab}q_{bj} + \ldots \qquad (i \;\; j) \qquad \text{(Ec. 35 bis)}$$

El símbolo ***n*!** es el factorial de ***n***, es decir **n!**=1×2×3×...×(***n***-1)×***n***. A partir de esta formulación en serie se puede usar un **procedimiento iterativo** para estimar las tasas ***q_{ij}*** con cualquier nivel deseado de precisión. En la primera iteración se estiman todas las tasas correspondientes a estados diferentes (***i j***), **en función únicamente del primer término de la serie**:

$$q_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{t,t+1} = \frac{N_{ij}^{t,t+1}}{N_i^t} \qquad \text{(Ec. 36)}$$

Estos valores iniciales son seguramente exagerados, porque aquí la tasa **instantánea** de transición se estima como idéntica a la probabilidad de transición **a lo largo de un intervalo dado**. Pero estas primeras aproximaciones sólo se utilizan para calcular una segunda aproximación $q_{ij}^{(2)}$ de todas las tasas aplicando los valores de la ecuación 35 a las series del miembro de la derecha en la ecuación 34. Se usan todos los términos de la serie que se consideren necesarios, pero usualmente sólo unos pocos son importantes. Las estimaciones así obtenidas, $q_{ij}^{(2)}$, se usan a su vez para valorizar nuevamente la ecuación 34 con los nuevos valores de las distintas tasas, a fin de obtener una tercera aproximación $q_{ij}^{(3)}$. En general, la aproximación ***r+1*** se basa en el cálculo de la ecuación 34 usando la aproximación precedente de orden ***r***:

$$q_{ij}^{(r+1)} = \frac{N_{eij}^{t,t+1}}{N_i^t} - \frac{1}{2!}\sum_a q_{ia}^{(r)} q_{aj}^{(r)} - \frac{1}{3!}\sum_a \sum_b q_{ia}^{(r)} q_{ib}^{(r)} q_{bj}^{(r)} + \ldots \quad \text{(Ec. 37)}$$

Nótese que en expresiones como $q_{ij}^{(r)}$ el superíndice no denota un exponente, sino el orden de la iteración de que se trata. No es $\boldsymbol{q_{ij}}$ elevada a la potencia ***r*** sino que se trata de la ***r***-ésima iteración o aproximación sucesiva del valor de la tasa.

Para la aplicación de este método iterativo hay que decidir hasta qué término de la serie se utiliza, y hasta qué número de iteraciones se llega. Para ello se puede establecer un umbral mínimo de variación para cada aspecto. Se añaden términos de la serie hasta que el último término incorporado tenga un valor inferior a un cierto umbral, por ejemplo 0.01 o bien 0.001, lo cual quiere decir que ese término contribuye al valor de $\boldsymbol{q_{ij}}$ con sólo un centésimo o un milésimo en más o en menos. Del mismo modo, se realizan iteraciones hasta que la última iteración no modifique ninguna tasa de transición en un valor superior a un umbral preestablecido, por ejemplo en más de 0.001. Asimismo, si el modelo teórico o las características de la variable prescriben que algunas $\boldsymbol{q_{ij}}$ sean necesariamente nulas (por ejemplo, que nadie pase de casado a soltero), este cálculo iterativo puede asignar a priori un valor cero a ciertas tasas, y estimar las restantes a partir de esa asignación. En tal caso, todas los términos referentes a las trayectorias donde intervenga esas tasas nulas tendrán un valor igual a cero.

La condición para que se pueda usar este método es que la serie sea convergente. La serie es convergente excepto cuando hay una correlación inversa entre las dos rondas del panel, esto es, cuando los que permanecen en el mismo estado son menos que los que pasan a otros estados ($N_{ii} < N_{ij}$ para algún estado ***j***). En la mayor parte de los datos de panel los procesos de cambio son suficientemente lentos como para que entre dos rondas la mayor parte de los sujetos permanece en su estado inicial, pero pueden darse casos en que ello no suceda. En tales casos las diferencias entre iteraciones sucesivas no irá disminuyendo sino aumentando, impidiendo llegar a una solución aceptable.

Sin embargo, es probable que cuando la serie no es convergente haya de todas maneras un número óptimo de iteraciones. Ese número óptimo se obtiene del siguiente modo: después de obtener los resultados de cada iteración, usando datos de dos rondas sucesivas, se utilizan las ***q*** resultantes para estimar los contingentes de otra ronda, por ejemplo la tercera o la cuarta, y se evalúa el ajuste entre estas proyecciones y la realidad observada en el panel. Para evaluar la diferencia entre la proyección y la observación se puede usar la medida ÷^{2}. El grado de ajuste por lo general aumenta al añadir los primeros términos de la serie, hasta que en cierta fase comienza a deteriorarse, indicando que la iteración debe detenerse allí.

Un método alternativo, basado en los mismos principios pero de cálculo menos engorroso, también está disponible. De la ecuación 32, si se transponen los factores, se deduce:

$$R_h = e^{Qh} \qquad \text{(Ec. 38)}$$

donde $\boldsymbol{R_h}$ es la matriz de probabilidades de transición entre el momento ***t*** y el momento ***t+h***. Tomando logaritmos la ecuación 38 se puede expresar en la forma siguiente:

$$lnR_h = Qh \qquad \text{(Ec. 39)}$$

El logaritmo de un número se puede expresar en una serie infinita de potencias de la forma siguiente:

$$ln\, x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots \qquad \text{(Ec. 40)}$$

Del mismo modo se puede expresar el logaritmo de una matriz:

$$ln\, R_h = (R_h - I) - \frac{1}{2}(R_h - I)^2 + \frac{1}{3}(R_h - I)^3 - \ldots \qquad \text{(Ec. 41)}$$

La matriz ***I*** es la matriz identidad. La diferencia $\boldsymbol{P_h - I}$ es la misma matriz $\boldsymbol{P_h}$ pero con los elementos de la diagonal principal, $\boldsymbol{r_{ii}}$, reemplazados por $\boldsymbol{r_{ii}-1}$. La serie converge si para todos los estados resulta ser $\boldsymbol{r_{ii}>0.5}$, es decir, si menos de la mitad de los sujetos de cada estado pasa a otro estado al cabo de un período de longitud ***h***. Este procedimiento, sin embargo, requiere que se calcule el valor de **todas** las tasas ***q*** sin permitir que algunas de ellas sean fijadas en cero (o en otro valor cualquiera) por razones teóricas, como era posible hacer en el otro procedimiento.[6]

4.3. Trayectorias indirectas de corto plazo

El panel permite observar trayectorias aparentes, es decir, las posiciones de un mismo sujeto en diferentes momentos del tiempo. Pero ya hemos visto que estas "fotografías" del **estado** de los sujetos en el momento de cada ronda del panel no es lo mismo que el registro de los **eventos** que ocurren entre una ronda y otra. Un sujeto que fue encontrado en los estados ***i*** y ***j*** en dos rondas sucesivas puede

[6] Véase. Coleman 1964b, cap. 4 y 5, donde se desarrolla extensamente este tipo de modelos y procedimientos de estimación.

haber pasado por cualquier estado ***k*** durante el intervalo entre ambas rondas, sin que ese evento fuese registrado por el panel.

La estimación de las tasas instantáneas de transición alcanzada en las secciones anteriores no permite conocer la trayectoria intra-período de cada uno de los individuos, pero sí permite estimar la frecuencia de determinadas trayectorias (Coleman 1964b, pp.183-184).

El enfoque más sencillo para este propósito consiste en utilizar la ecuación 34:

$$N_{eij}^{t,t+h} = N_i^t \left[d_{ij} + hq_{ij} + \frac{h^2}{2!} \sum_a q_{ia} q_{aj} + \frac{h^3}{3!} \sum_a \sum_b q_{ia} q_{ab} q_{bj} + \ldots \right]$$

Esta ecuación permite calcular el número de sujetos que comienzan en el estado ***i*** y acaban en el estado ***j***, e incluye aquellos que realizan un solo cambio de estado a la tasa q_{ij}, y también aquellos que han pasado por un estado intermedio ***a***, o por dos estados intermedios ***a*** y ***b***, etc. Los sucesivos términos de la serie van divididos por sucesivos factoriales, es decir por 2!=2, por 3!=6, por 4!=24, por 5!=120, etc., y su denominador es el producto de un número creciente de fracciones inferiores a 1, de modo que en general cada término será menor que el anterior y su magnitud disminuirá rápidamente.

Ahora consideremos una determinada secuencia de estados entre el estado inicial ***i*** y el estado final ***j***, por ejemplo ***iabcj***. Por ejemplo, en una variable con ***m*** categorías se podría considerar la secuencia 23141, que es una de las formas de empezar en el estado ***i***=2 y terminar en el estado ***j***=1. Los sujetos que recorren esta trayectoria han realizado cuatro cambios de estado, a saber: 2→3, 3→1, 1→4 y 4→1. Esto significa en principio que aquellos términos de la serie que no correspondan a esta trayectoria deben ser considerados como nulos e iguales a cero. Esto incluye por ejemplo los primeros cuatro términos de la serie, ya que ellos corresponden a trayectorias con menos de cuatro cambios de estado. El primer término que no es nulo es el término que incluye el producto de cuatro tasas q_{ij}, es decir:

$$\frac{h^4}{4!} \sum_a \sum_b \sum_c q_{ia} q_{ab} q_{bc} q_{cj} + \ldots$$

Sin embargo, no todos los términos de la triple sumatoria se conforman al patrón establecido, sino sólo uno, es decir el término definido por $q_{23}q_{31}q_{14}q_{41}$. Esto significa que una posible estimación del número de personas que recorre esa trayectoria es:

$$N_{23141}^{t,t+h} = N_2^t \left[\frac{h^4}{4!} q_{23} q_{31} q_{14} q_{41} \right]$$

Esta ecuación podría pensarse que suministra directamente la estimación del número de sujetos que recorre esta trayectoria. Sin embargo, hay que añadir también aquellos que realizan estos mismos cambios de estado pero en algún momento **permanecen** en su mismo estado. Por ejemplo, la secuencia $q_{23}q_{31}q_{11}q_{14}q_{41}$, que es un producto de cinco factores (tasas de transición) incluyendo un factor de permanencia en el estado 1, es decir q_{11}, también cumple con la misma trayectoria, del mismo modo que lo hace $q_{22}q_{22}q_{23}q_{23}q_{31}q_{14}q_{41}$, donde el sujeto primero permanece dos veces en el estado 2, y luego realiza sus cambios de estado a 3, a 1, a 4 y finalmente a 1. Esto significa que además de la secuencia básica $q_{23}q_{31}q_{14}q_{41}$ habrá **secuencias con permanencias**. Esto incluirá algunas secuencias de cinco transiciones, esto es, con cuatro cambios y una permanencia, como $q_{23}q_{31}q_{11}q_{14}q_{41}$. En esta secuencia, el sujeto permanece en el estado 1 despues de estar en el estado 3 y antes de pasar al estado 4. Estas secuencias serán cinco en total, incluyendo los cuatro cambios incluidos en la trayectoria y una permanencia en un mismo estado, que puede ser cualquiera de los cinco que figuran en la trayectoria; aparte de la ya mencionada secuencia, ellas son $q_{22}q_{23}q_{31}q_{14}q_{41}$, $q_{23}q_{33}q_{31}q_{14}q_{41}$, $q_{23}q_{31}q_{14}q_{44}q_{41}$ y $q_{23}q_{31}q_{14}q_{41}q_{11}$, Hay también algunas secuencias de seis transiciones como $q_{22}q_{22}q_{23}q_{31}q_{14}q_{41}$ o bien $q_{22}q_{23}q_{23}q_{31}q_{14}q_{41}$ (hay un total de 14 secuencias con seis tasas q_{ij}, que incluyen los cuatro cambios de estado obligatorios de la trayectoria más **dos** permanencias). También se incluirán algunas secuencias con tres permanencias, es decir con siete tasas de transición, y así sucesivamente, aunque estos términos de orden superior rápidamente se tornarán insignificantes en su magnitud.

Trayectorias muy complicadas como éstas son de dudosa utilidad práctica. Pero puede ser importante tener una idea de la posible incidencia de algunas trayectorias breves de mayor interés. Por ejemplo, en un estudio sobre desempleo podría ser importante saber qué proporción de las personas que aparecen "ocupadas" en ambas rondas atravesaron una fase intermedia de desempleo, con una secuencia básica $q_{12}q_{21}$ que puede incluir trayectorias con permanencias como $q_{12}q_{22}q_{21}$ o $q_{11}q_{12}\ q_{21}$.

La incidencia porcentual de una determinada trayectoria no indica **cuáles** sujetos han recorrido esa trayectoria. En el ejemplo anterior, si hay N_{11} sujetos que aparecen ocupados en ambas rondas, y se determina una cierta proporción estimada de esos sujetos que habría tenido algún período intermedio de desocupación, no se podría identificar precisamente cuáles sujetos han tenido esa experiencia.

Tampoco estos resultados permiten, de por sí, estimar **cuánto tiempo** han pasado los sujetos en cada fase de la trayectoria. La mayor parte de los probemas reales involucra cierta "fricción", que implica un cierto tiempo para cada cambio de estado. Nadie puede enviudar y volverse a casar en un instante, y normalmente quedar desocupado y volver a encontrar empleo también toma cierto tiempo. Más aún, cada uno de los cambios de estado puede tener su propio nivel de "fricción"; por ejemplo, una persona casada puede enviudar en un instante, de modo que ahí la "fricción" es muiy poca, pero difícilmente se case nuevamente sino después de un razonable intervalo, de modo que enviudar tiene menos fricción que volver a casarse. Pese a esto, de todos modos una estimación gruesa podría partir del supuesto de una fricción uniforme y una distribución equidistante de las fases a lo largo del intervalo considerado: si las dos rondas están separadas por seis meses, y hay un grupo de sujetos cuya trayectoria implica tres cambios de estado en ese lapso, se puede asumir que esos cambios ocurren cada dos meses **en promedio**. Más precisamente, se podría asumir que el primero de los tres cambios de estado ocurre en un momento variable cuya fecha promedio se sitúa en la mitad del primer bimestre después de iniciado el intervalo de seis meses; el segundo cambio de estado ocurre también en una fecha variable que en promedio se sitúa en la mitad del segundo intervalo bimestral, es decir a los tres meses de la primera ronda; y el último cambio ocurre en una fecha variable que en promedio se sitúa a la mitad del último bimestre, es decir a los cinco meses desde la primera ronda (un mes antes de la segunda). Estos supuestos no impiden que los cambios ocurran en cualquier fecha, ya que sólo postulan una fecha promedio para cada uno de ellos. Esta fecha promedio puede luego usarse para otros cálculos, aun cuando su naturaleza es esencialmente especulativa y no tiene ningún basamento empírico concreto.

Dado que las personas que recorren cada trayectoria ***iab... j*** son sólo una fracción del total de personas que empezó en el estado ***i*** y acabó en el estado ***j***, los cuales de por sí son sólo una fracción del total de sujetos en el panel, es muy posible que el número o el porcentaje de sujetos que se estima que recorre una trayectoria compleja resulte muy pequeño, y por lo tanto estadísticamente poco significativo (a menos que la cantidad de personas en el panel sea realmente muy grande). Por consiguiente, este análisis de "**trayectorias presuntas"** sólo podría hacerse para los flujos más numerosos, y restringido a las trayectorias con pocas fases, pues de otro modo los resultados no indicarían realmente nada en términos estadísticos.

— CONTINÚA EN LA TERCERA PARTE —

Buenos Aires, DIC/2002

por **Héctor Maletta**
Investigador Principal, Área Empleo y Población, IDICSO, USAL.
Email: hmaletta@fibertel.com.ar