IDICSO
Instituto de Investigación en Ciencias Sociales
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad del Salvador

ÁREA EMPLEO Y POBLACIÓN

Metodología de análisis de panel de variables categóricas

TERCERA PARTE

por **Héctor Maletta***

Buenos Aires, DIC/2002

* **MALETTA, Héctor.** Lic. en Sociología, Universidad Católica Argentina. Doctor en Economía, Universidad de Bologna (Italia). Docente de carreras de grado y posgrado, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad del Salvador (USAL). Investigador Principal, Área Empleo y Población, IDICSO, USAL. Consultor de organismos internacionales, especialmente la FAO, pero también otros como el FIDA y el BID. Consultor internacional en casi todos los países de América Latina y en algunos países de África y Asia.

BREVE HISTORIA DEL IDICSO. Los orígenes del IDICSO se remontan a 1970, cuando se crea el "Proyecto de Estudio sobre la Ciencia Latinoamericana (ECLA)" que, por una Resolución Rectoral (21/MAY/1973), adquiere rango de Instituto en 1973. Desde ese entonces y hasta 1981, se desarrolla una ininterrumpida labor de investigación, capacitación y asistencia técnica en la que se destacan: estudios acerca de la relación entre el sistema científico-tecnológico y el sector productivo, estudios acerca de la productividad de las organizaciones científicas y evaluación de proyectos, estudios sobre política y planificación científico tecnológica y estudios sobre innovación y cambio tecnológico en empresas. Las actividades de investigación en esta etapa se reflejan en la nómina de publicaciones de la "Serie ECLA" (SECLA). Este instituto pasa a depender orgánica y funcionalmente de la Facultad de Ciencias Sociales a partir del 19 de Noviembre de 1981, cambiando su denominación por la de Instituto de Investigación en Ciencias Sociales (IDICSO) el 28 de Junio de 1982.

Los fundamentos de la creación del IDICSO se encuentran en la necesidad de:

- Desarrollar la investigación pura y aplicada en Ciencias Sociales.
- Contribuir a través de la investigación científica al conocimiento y solución de los problemas de la sociedad contemporánea.
- Favorecer la labor interdisciplinaria en el campo de las Ciencias Sociales.
- Vincular efectivamente la actividad docente con la de investigación en el ámbito de la facultad, promoviendo la formación como investigadores, tanto de docentes como de alumnos.
- Realizar actividades de investigación aplicada y de asistencia técnica que permitan establecer lazos con la comunidad.

A partir de 1983 y hasta 1987 se desarrollan actividades de investigación y extensión en relación con la temática de la integración latinoamericana como consecuencia de la incorporación al IDICSO del Instituto de Hispanoamérica perteneciente a la Universidad del Salvador. Asimismo, en este período el IDICSO desarrolló una intensa labor en la docencia de post-grado, particularmente en los Doctorados en Ciencia Política y en Relaciones Internacionales que se dictan en la Facultad de Ciencias Sociales. Desde 1989 y hasta el año 2001, se suman investigaciones en otras áreas de la Sociología y la Ciencia Política que se reflejan en las series "Papeles" (SPI) e "Investigaciones" (SII) del IDICSO. Asimismo, se llevan a cabo actividades de asesoramiento y consultoría con organismos públicos y privados. Sumándose a partir del año 2003 la "Serie Documentos de Trabajo" (SDTI).

La investigación constituye un componente indispensable de la actividad universitaria. En la presente etapa, el IDICSO se propone no sólo continuar con las líneas de investigación existentes sino también incorporar otras con el propósito de dar cuenta de la diversidad disciplinaria, teórica y metodológica de la Facultad de Ciencias Sociales. En este sentido, las áreas de investigación del IDICSO constituyen ámbitos de articulación de la docencia y la investigación así como de realización de tesis de grado y post-grado. En su carácter de Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad del Salvador, el IDICSO atiende asimismo demandas institucionales de organismos públicos, privados y del tercer sector en proyectos de investigación y asistencia técnica.

IDICSO

Departamento de Comunicación

Email: idicso@yahoo.com.ar

Web Site: http://www.salvador.edu.ar/csoc/idicso

TERCERA PARTE

TABLA DE CONTENIDOS

5. INCERTIDUMBRE DE RESPUESTA 1

5.1. El problema de la incertidumbre de respuesta 1

5.2. Análisis del cambio con incertidumbre de respuesta 8

5.3. Incertidumbre de respuesta en presencia de cambio 16

6. MODELOS MULTIVARIADOS DE PANEL CON VARIABLES CATEGÓRICAS 19

6.1. Algunos aspectos conceptuales de la causación 19

6.2. Procesos causales continuos con variables categóricas 22

6.2.1. Cambio sin factores causales explícitos 23

6.2.2. Factores causales 24

6.3. Efectos causales en un corte transversal 24

6.3.1. Variables dicotómicas con un solo factor independiente 25

6.3.2. Análisis transversal multivariado con dicotomías 28

6.3.3. Variables politómicas 32

6.3.4. Interacción entre factores 33

6.4. Procesos causales continuos con datos de panel 34

6.4.1. Planteo general con un solo factor causal 34

6.4.2. Un factor constante con efecto simple unidireccional 36

6.4.3. Varios factores constantes con efecto simple unidireccional 37

6.4.4. Varios factores constantes con efecto doble unidireccional 40

6.4.5. Factores variables 41

7. VARIABLES LATENTES EN ESTUDIOS DE PANEL 45

8. COHORTES TEÓRICAS E HISTORIA DE EVENTOS 46

Nota técnica – Vectores y matrices 46

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 51

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE PANEL DE VARIABLES CATEGÓRICAS

TERCERA PARTE

5. Incertidumbre de respuesta

El primer tipo de modelo univariado que puede investigarse es un modelo que tiende a discriminar entre el auténtico cambio de estado de los sujetos, y los cambios aparentes que resultan de fluctuaciones aleatorias en las respuestas suministradas por los sujetos. Este problema supone distinguir entre el **estado subyacente o latente** de los sujetos, que es inobservable, y su **estado manifiesto** o respuesta observable. En cada estado latente posible, el sujeto no da necesariamente una determinada respuesta, sino que tiene diferentes **probabilidades** de dar las distintas respuestas posibles. La respuesta particular que se observe en una determinada ronda del panel es sólo una de las que podría haber producido, y además, una misma respuesta manifiesta puede ser producida por sujetos en diferentes estados subyacentes o internos.

5.1. El problema de la incertidumbre de respuesta

La respuesta registrada no necesariamente debe coincidir siempre con el estado subyacente del sujeto. De cada 100 portadores de HIV puede siempre haber alguno que resulte negativo en el examen serológico, y en cambio de cada 100 individuos sanos puede aparecer alguno cuyo examen indique HIV positivo. Estas situaciones se conocen en la investigación médica como "falsos negativos" y "falsos positivos". Del mismo modo, si una pregunta se utiliza como indicador de una actitud subyacente (por ejemplo autoritarismo) es posible que algunos sujetos autoritarios contesten negativamente de vez en cuando a esa pregunta, por distintas razones aleatorias (por no haberla comprendido bien, o para ocultar sus creencias, o porque el encuestador formuó la pregunta incorrectamente, etc.), y en cambio algunos sujetos que no son autoritarios podrían ocasionalmente contestar positivamente por similares razones. Estos "falsos positivos" y "falsos negativos" pueden deberse a fluctuaciones aleatorias del estado del sujeto, o a errores aleatorios del aparato de medición. Los médicos los controlan mediante la repetición del análisis, pues la probabilidad de que el error se cometa dos veces es muy pequeña, y también mediante la aplicación de procedimientos "redundantes", es decir, aplicando dos análisis diferentes para ver si concuerdan o difieren entre sí.

La posibilidad de que existan estos casos de "falsos positivos" o "falsos negativos", o más en general, que las respuestas puedan variar por razones aleatorias independientemente del verdadero estado de los sujetos, es sumamente importante cuando se analizan paneles, pues el panel permite, hasta cierto punto, distinguir el auténtico cambio de las meras fluctuaciones aleatorias.

Supongamos que 1000 sujetos elegidos al azar son encuestados en dos oportunidades acerca de su opinión política. Existen dos posibles opiniones, A y B. Los resultados han sido los siguientes.

	Opinión en Octubre		
Opinión en Septiembre	**A**	**B**	**Total**
A	450	113	563
B	120	317	437
Total	570	430	1000

Evidentemente hay un considerable cambio de opinión a nivel individual entre las dos encuestas: un total de 233 personas cambiaron de opinión (120 en un sentido y 113 en el otro). Las proporciones marginales permanecieron bastante estables, pero no obstante se registra algún cambio en ellas: los sujetos con la opinión A aumentan de 563 en Septiembre a 570 en Octubre (un aumento equivalente a un 1.23% en relación al contingente que en Julio manifestó la opinión A). Si los individuos manifestaran siempre en forma fidedigna su opinión, es evidente que ese cambio representaría un verdadero cambio en el estado de la muestra, si bien de pequeña magnitud. En ese caso el analista podría, por ejemplo, anticipar que se está produciendo un deslizamiento de opiniones a favor de la opinión A, a una tasa de 1.23% mensual, y puede incluso predecir que una tercera encuesta en Noviembre mostraría un vuelco adicional en la misma dirección. Así por ejemplo los encuestadores políticos toman encuestas en varias fechas a lo largo de la campaña electoral, y si detectan una tendencia creciente a favor de determinado partido proyectan el porcentaje electoral de ese partido extrapolando esa tendencia hasta la fecha de la elección. Sin embargo, cabe la posibilidad de que ese pequeño aumento registrado en el porcentaje que está a favor de A sea una mera **fluctuación aleatoria**. ¿Cómo decidir cuál es la interpretación más probable?

Si las probabilidades de transición se obtuviesen a partir de esta tabla, considerando e cambio manifiesto como reflejo fiel de un cambio latente, el número esperado de personas con opinión A en la ronda siguiente volvería a aumentar. Si la probabilidad de cambiar de opinión por unidad de tiempo fuese constante, es decir si se tratase de un proceso de Markov, este aumento a favor de A podría continuar hasta alcanzar un estado de equilibrio. Aplicando la regla anteriormente establecida, el equilibrio se alcanzaría cuando la proporción entre los que sostienen ambas opiniones (N_A/N_B) equivalga al cociente entre las probabilidades de cambiar de opinión en ambos sentidos (r_{BA}/r_{AB}). En este caso esas probabilidades de transición son r_{BA}=120/437=0.2746, y r_{AB}=113/563=0.20, de modo que su cociente es 0.2746/0.20=1.37. Con 1000 casos en total, esto implica que los contingentes de equilibrio (redondeados) serían: N_A=578 y N_B=422. Dada la cercanía entre los valores observados en los dos primeros períodos y los valores de equilibrio, se percibe que el equilibrio se alcanzaría en sólo una o dos rondas adicionales.

Ahora bien, la divergencia entre lo observado y el equilibrio es muy pequeña en este caso. Alguien podría especular que quizá la distribución **está** en equilibrio desde el inicio, y que las diferencias observadas son meras fluctuaciones casuales. Esta hipótesis abre todo un nuevo horizonte de investigación, ya que implica suponer que los individuos no tienen que expresar siempre su verdadera opinión. Es posible concebir la respuesta de los individuos como función de dos factores: su "verdadero" estado interno (A o B) y un factor de "error" o incerteza de respuesta que en algunos casos hace que los individuos den respuestas que no corresponden a su verdadera opinión. Un individuo que siempre ha tenido la opinión A podría dar ocasionalmente la respuesta B por razones completamente aleatorias (para hacer una broma al encuestador, para expresar su malhumor momentáneo, o por cualquier otra razón similar). Esta posibilidad pudo estar presente tanto en julio como en octubre. Esto equivale a pensar en la existencia de dos procesos simultáneos: uno de ellos hace que el sujeto adopte la opinión A o la opinión B **en su fuero interno**. El otro hace que al ser encuestado **manifieste** una opinión que puede ser su verdadera opinión o la contraria. ¿Es posible distinguir los verdaderos cambios de opinión subjetiva (cambios en la **variable latente**) de los cambios meramente aparentes en la **variable manifiesta** (las respuestas)? En el ejemplo anterior, ¿son los siete sujetos que cambiaron de respuesta una manifestación de una tendencia real, o una mera fluctuación aleatoria de las respuestas que no refleja cambios en la variable de fondo?

Estas discrepancias entre la respuesta y la verdadera opinión no son, estrictamente, errores de muestreo en el sentido ordinario. Para empezar, la muestra de individuos es la misma en ambas oportunidades. En todo caso podría suponerse que las dos rondas de entrevistas constituyen una "muestra de fechas", y que los sujetos podrían dar diferentes respuestas según la fecha en que fueran entrevistados, pero esa argumentación es poco convincente. Lo que aquí se analiza es algo más que un problema de muestreo: es un modelo teórico acerca de cómo se conectan las variables "latentes" no observadas en forma directa (por ejemplo la opinión política subjetiva) y las variables "manifiestas" que son objeto de observación (por ejemplo las respuestas en una entrevista). Entre ambas puede haber una relación **determinista** o una relación **probabilista**, y esto se añade al problema general de la variabilidad de muestreo. Aun cuando no hubiese errores de muestreo podría haber aún una relación estocástica entre opinión y respuesta.

En el caso de tener sólo dos períodos, como en el ejemplo precedente, sólo cabe la aplicación de un test estadístico, como el $÷^2$, para ver si la diferencia entre las frecuencias observadas y las de equilibrio es una diferencia significativa. Si no es significativa, no se podría rechazar la hipótesis nula de que el estado de la opinión pública en ambas fechas es el mismo. Cuando se dispone de un mayor número de períodos cabe aplicar otros enfoques.

Esta posibilidad es particularmente útil no tanto en el caso de una pequeña diferencia, como la del ejemplo, sino sobre todo cuando hay una tendencia más marcada a favor de una de las alternativas. Aun en ese caso, puede ser que se esté en presencia de dos procesos simultáneos: un proceso de cambio subyacente, gobernado por un modelo de Markov, y además ciertos factores aleatorios que hacen fluctuar la respuesta de algunos sujetos. En tal caso es importante identificar qué porción de los cambios observados se debe a los procesos de cambio "verdaderos" gobernados por el modelo subyacente de Markov, y qué parte se debe a factores aleatorios.

Este tipo de pregunta no necesariamente se limita al caso de la expresión de opiniones subjetivas, sino que puede referirse también a variables "objetivas" cuya medición dé lugar a posibles fluctuaciones en los registros aun cuando no haya producido ningún cambio en la variable subyacente, como es el caso de los falsos positivos o falsos negativos en los exámenes médicos. En este caso el origen de las fluctuaciones no son los cambios de humor del entrevistado, sino las fluctuaciones aleatorias del aparato de medida o la imprecisión intrínseca del indicador que se utiliza en el estudio. Lo característico en esta problemática es que se introduce una distinción entre la variable latente o subyacente que se pretende medir, y la variable manifiesta o indicador que es efectivamente medida a través de la investigación, y se presupone una relación no determinista sino estocástica entre la variable subyacente y el indicador. En este enfoque, cuando un sujeto escucha la pregunta no manifiesta necesariamente su estado de opinión subjetivo, pues su respuesta, además de depender de su opinión subjetiva, se ve afectada por un elemento aleatorio (por ejemplo cambios en su estado de ánimo) que a veces lo lleva a manifestar una opinión diferente a la que realmente sostiene. Por ejemplo, puede suceder que en cada ronda un 2% de los sujetos con opinión A, y quizá un 1% de los sujetos con opinión B, den una opinión contraria a la real debido a este factor subjetivo. Los sujetos que lo hacen no tienen por qué ser siempre los mismos, ya que la probabilidad de hacerlo afecta a todos por igual.

Las discrepancias entre respuesta y opinión que estamos considerando aquí no son de carácter **sistemático** sino **aleatorio**. Una discrepancia sistemática aparecería por ejemplo en un país donde no reine mucha libertad de opinión: algunas personas pueden tener temor de manifestar opiniones opositoras al gobierno, de modo que sistemáticamente las **respuestas** opositoras tenderán a subestimar la magnitud de las verdaderas **opiniones** opositoras. Este sería un factor sistemático de distorsión. Pero aquí se hace referencia a factores puramente aleatorios, que operan en cualquier dirección y sobre cualquier individuo sin ningún patrón determinado.

La idea general para distinguir entre un verdadero cambio en el estado de los sujetos y las fluctuaciones aleatorias en las respuestas consiste en verificar si los cambios son acumulativos. Si lo son, probablemente se trata de un proceso efectivo de cambio; en cambio, si los cambios entre la segunda y tercera ronda tienden a cancelar los cambios ocurridos entre la primera y la segunda, probablemente se trata de variaciones aleatorias. Un método para ello consiste en estimar las probabilidades de transición a partir de dos rondas adyacentes, realizadas por ejemplo en los momentos ***t*** y ***t+1***, y luego recalcularlas para un período más largo, por ejemplo con la primera y la cuarta ronda, realizadas respectivamente en las fechas ***t=1*** y ***t=3***.

	Onda *t*=2	
Onda *t*=1	**Respuesta A**	**Respuesta B**
Respuesta A	r_{AA}^{12}	r_{AB}^{12}
Respuesta B	r_{BA}^{12}	r_{BB}^{12}

	Onda *t*=4	
Onda *t*=1	**Respuesta A**	**Respuesta B**
Respuesta A	r_{AA}^{14}	r_{AB}^{14}
Respuesta B	r_{BA}^{14}	r_{BB}^{14}

Si el proceso subyacente inicialmente estuviese en equilibrio, y las discrepancias observadas respecto al equilibrio se debiesen **sólo a factores aleatorios**, entonces las probabilidades basadas en las rondas 1 y 4 no tendrían que ser muy distintas de las basadas en las rondas 1 y 2, ya que se deberían únicamente a fluctuaciones aleatorias. En otras palabras, las probabilidades de transición calculadas sobre los cambios de estado entre ***t*** y ***t+1*** deberían ser muy similares a las probabilidades de transición calculadas a partir de los cambios de estado entre ***t*** y ***t+4***, o más genéricamente entre ***t*** y ***t+h***. En cambio, si el proceso no se encontraba en equilibrio, y no hubiera **ningún efecto aleatorio**, las variaciones observadas en las distribuciones marginales de las distintas rondas reflejarían únicamente un verdadero cambio conducido por un modelo de Markov, y en ese caso las probabilidades basadas en las rondas 1 y 4 deberían equivaler al **efecto acumulado** de las probabilidades basadas en 1 y 2 aplicadas repetidamente. De acuerdo a la ecuación 8, si no hubiera efectos aleatorios debería cumplirse (aproximadamente) lo siguiente:

$$p_i^4 \approx p_{ei}^4 = p_i^1 (R_{12})^4 \qquad \text{(Ec. 42)}$$

donde $\boldsymbol{R_{12}}$ es la matriz de probabilidades de transición basadas en las rondas 1 y 2, y por su parte p_i^t representa la proporción de sujetos en el estado ***i*** en la ronda ***t***. Si por el contrario los cambios en las distribuciones marginales observados en las dos primeras rondas no reflejan auténticos cambios agregados sino meras fluctuaciones aleatorias, entonces el cruce de las respuestas dadas en ***t*=**1 y en ***t*=**4 debería arrojar aproximadamente los mismos resultados que el cruce entre ***t*** y ***t*+**1. Algunas probabilidades serían levemente superiores o inferiores, debido a factores aleatorios, pero no mostrarían ninguna tendencia acumulativa. Se observaría aproximadamente lo siguiente:

$$R_{12} \quad R_{14} \qquad \text{(Ec. 43)}$$

Estos dos son casos extremos. Lo más probable es que se registre una situación intermedia, con algo de cambio auténtico y algo de factores aleatorios. Las proporciones marginales p_i^t cuando ***t*=**4 frecuentemente resultarán estar en algún punto intermedio entre las proporciones iniciales (lo cual implicaría que se cumple la ecuación 43) y las proporciones esperadas por el puro proceso de Markov, que resultarían de la aplicación de la ecuación 42. El grado de similitud entre estos pares de proporciones marginales podría ser medido por un coeficiente de asociación para tablas de contingencia, como por ejemplo el coeficiente ö (*phi*), el coeficiente ô (*tau*) de Kendall, o el ÷² (*chi cuadrado*). Estos indicadores de asociación o independencia se deberían aplicar a la tabla de rotación observada de las rondas 1 y 4, o en general 1 y ***h*** (donde ***h*>2**), a la tabla de rotación esperada que refleja los efectos acumulados de las probabilidades de transición calculadas con las rondas 1 y 2, y a la tabla de rotación de equilibrio. Si los coeficientes obtenidos son iguales o casi iguales puede deducirse que no hay mucha incerteza o variabilidad aleatoria, sino un puro o casi puro proceso de Markov. Si en cambio los coeficientes difieren entre sí en mayor o menor medida, puede deducirse que existe un componente aleatorio mayor o menor según la magnitud de esa diferencia.

El siguiente ejemplo puede servir para ilustrar este tipo de situación. Las dos primeras ondas de una encuesta de panel arrojan la siguiente tabla de rotación de frecuencias.

	Onda 2		
Onda 1	**Respuesta A**	**Respuesta B**	**Total**
Respuesta A	400	400	800
Respuesta B	100	700	800

Total	500	1100	1600

De esta tabla se pueden estimar las probabilidades de transición siguientes.

	Onda 2	
Onda 1	**Respuesta A**	**Respuesta B**
Respuesta A	0.500	0.500
Respuesta B	0.125	0.875

A partir de estas cifras se pueden estimar las frecuencias **esperadas** para las ondas 3 y 4. Ellas son las siguientes.

	Onda 3 esperada		
Onda 2	**Respuesta A**	**Respuesta B**	**Total**
Respuesta A	250	250	500
Respuesta B	137	963	1100
Total	387	1213	1600

	Onda 4 esperada		
Onda 3 esperada	**Respuesta A**	**Respuesta B**	**Total**
Respuesta A	194	193	387
Respuesta B	152	1061	1213
Total	346	1254	1600

Ahora bien, las respuestas efectivamente obtenidas en las ondas 3 y 4 arrojaron los siguientes resultados:

	Onda 3 observada

Onda 2	Respuesta A	Respuesta B	Total
Respuesta A	320	180	500
Respuesta B	160	860	1100
Total	480	1120	1600

	Onda 4 observada		
Onda 3 observada	**Respuesta A**	**Respuesta B**	**Total**
Respuesta A	240	240	480
Respuesta B	200	920	1120
Total	440	1160	1600

De acuerdo a los datos observados **se da sin duda un proceso de cambio**: el número de sujetos en la respuesta A va disminuyendo (de 800 iniciales a 500 en la segunda ronda, a 480 en la tercera y 440 en la cuarta); pero al mismo tiempo **ese cambio claramente no concuerda con las previsiones del proceso de Markov estimado a partir de las dos primeras ondas**, según el cual los casos con respuesta A habrían bajado de 800 a 500 y luego a 387 y 346. Evidentemente, la proporción de respuestas A va disminuyendo mucho más lentamente que lo que se podría prever a partir de las dos primeras rondas. Ello significa que en algunas de las rondas (incluyendo las dos primeras) las respuestas estuvieron afectadas (en más o en menos) por otros factores, incluyendo factores aleatorios.

Ante esta situación, y sin descartar la posibilidad de tener en cuenta **otras variables** que pudieran explicar esa discrepancia, una de las explicaciones puede ser que junto al proceso de Markov con probabilidades de transición constantes hay también **factores aleatorios** que influyen en la evolución de las cifras. El problema radica en medir la magnitud del efecto de esos factores, a fin de poder aislar el efecto del proceso de Markov intrínseco y eventualmente el efecto de otras variables, separándolo del efecto de factores aleatorios.

5.2. Análisis del cambio con incertidumbre de respuesta

Cuando hay incertidumbre de respuesta, la medición directa del cambio a partir de las variaciones en las respuestas puede no arrojar resultados confiables. En esta sección se establecen las bases para medir el cambio en el estado de los sujetos, una vez despejado el efecto de la incertidumbre de respuesta.

Hasta ahora se han concebido los datos de panel como un proceso de cambio de los sujetos, de un estado ***i*** (consistente en dar una respuesta ***i***) a un estado ***j*** consistente en dar la respuesta ***j***. Ahora vamos a distinguir el **estado subyacente** del sujeto por un lado, y por otro lado las **respuestas manifiestas** que ese sujeto proporciona. Se supone que entre ambos aspectos no hay una relación determinista sino probabilística. Para modelizar el estado del sujeto en una forma sencilla, y sin que este artificio sea intrínsecamente necesario, vamos a suponer que el cambio de un estado a otro no le ocurre al sujeto como tal, sino a un conjunto de **elementos de respuesta,** o **factores de respuesta**, de los cuales a cada individuo le corresponde un gran número. Pueden concebirse como elementos subjetivos o como estímulos externos, todos ellos afectando al respondente. Cada uno de estos elementos puede estar condicionado a producir determinada respuesta ***i*** en una variable con ***m*** categorías, o puede estar en un estado "no condicionado" que no lo inclina a dar ninguna respuesta en particular. Esto significa que no se concibe que **el individuo** está en un determinado estado, sino que son estos hipotéticos "elementos" los que están en uno u otro estado. Estos elementos están sujetos a un proceso estocástico de cambio continuo de estado, según ciertas tasas instantáneas de transición q_{ij} del mismo modo que anteriormente se concebía al individuo. Este modelo se aplica particularmente para modelizar estadísticamente las actitudes subjetivas de los individuos y sus respuestas manifiestas ante estímulos externos, pero puede aplicarse en general a toda clase de unidades de análisis y a toda clase de variables.[1]

Si la variable manifiesta que interesa es una variable categórica con ***m*** categorías, por ejemplo una pregunta con ***m*** respuestas posibles, supondremos que, para cada individuo, **cada elemento de respuesta** puede estar en ***m*** estados diferentes. Cada uno de esos estados condiciona la producción de una determinada respuesta ***i*** (***i***=1, 2, ... ***m***). En un momento dado **cada individuo *k*** poseerá una cierta cantidad u_{1k} de elementos que están en el estado 1, es decir, condicionados a la respuesta 1, otra cantidad u_{2k} de elementos que están en el estado 2, y así sucesivamente para los ***m*** estados posibles.[2] En ese momento, la probabilidad de que ese individuo produzca la respuesta ***i*** será:

[1] Esta clase de modelos fue introducido originariamente como un modelo de aprendizaje por Estes y Burke 1955, y retomado por. para el presente contexto por Coleman (1964a) y también en Coleman 1964b, cap.12 y 13.

[2] Para mayor simplicidad se dejan de lado los casos "sin respuesta"; implícitamente suponemos que no existen, o que entre los ***m*** estados de los elementos puede haber un estado no condicionado, en el cual no se favorece ninguna respuesta en particular, de modo que una de las ***m*** categorías posibles de respuesta es la ausencia de respuesta (lo que en las encuestas suele ser clasificado como "No sabe/No contesta"), y sólo habría ***m***-1 categorías "válidas" aparte de la ausencia de respuesta. El problema general de los datos no válidos merece un tratamiento más amplio: véase por ejemplo Little y Rubin, 1987; o también Ahlo, 1990. Para el caso específico de los datos faltantes en los estudios de panel puede verse Alderman y otros, 2001.

$$P_k(i) = \frac{u_{ik}}{\sum_{j=1}^{m} u_{jk}} \qquad \text{(Ec. 44)}$$

Como el sujeto tiene elementos en todos los estados, aunque con diferente cantidad en cada uno de ellos, en cada instante los sujetos distribuirán sus respuestas entre las ***m*** respuestas posibles de acuerdo a la distribución de sus elementos entre esos ***m*** estados. No se puede afirmar con certeza qué respuesta dará cada individuo, sino sólo las probabilidades que tiene de dar diferentes respuestas. Si el mismo individuo fuese interrogado varias veces, es posible que en cada ocasión dé diferentes respuestas aun cuando el estado de sus elementos no haya cambiado en absoluto. Del mismo modo, si fuese entrevistado un grupo de individuos con sus elementos distribuidos de igual modo entre los diferentes estados, no todos darían la misma respuesta.

Los cambios de estado de estos elementos hipotéticos son cambios **continuos**, gobernados por **tasas instantáneas de transición q_{ij}**. Debe remarcarse que estas no son tasas de transición de los individuos, sino de los elementos de cada individuo. En un intervalo infinitesimal ***dt*** la probabilidad de que **un elemento** pase del estado ***i*** al estado ***j*** será igual a $q_{ij}dt$. Llámese v_{ik}^t a la probabilidad de que un elemento del individuo ***k*** esté en el estado ***i*** en el momento ***t***. El cambio en esas probabilidades de estado de los elementos vendrá dado **para cada individuo *k*** por un conjunto de ecuaciones como el siguiente:

$$\frac{dv_{1k}^t}{dt} = q_{11k}v_{1k}^t + \ldots + q_{i1k}v_{ik}^t + \ldots + q_{m1k}v_{mk}^t$$

....

$$\frac{dv_{ik}^t}{dt} = q_{1ik}v_{ik}^t + \ldots + q_{iik}v_{ik}^t + \ldots + q_{mik}v_{mk}^t \qquad \text{(Ec. 45)}$$

....

$$\frac{dv_{mk}^t}{dt} = q_{1mk}v_{1k}^t + \ldots + q_{imk}v_{ik}^t + \ldots + q_{mmk}v_{mk}^t$$

Dado que las q_{ikj} son aquí tasas instantáneas de transición **de los elementos de un individuo, e**n principio estas tasas se conciben como específicas para cada individuo, por lo cual se las denota como q_{ijk} y se interpretan como la tasa instantánea a la cual los elementos del individuo ***k*** pasan del estado ***i*** al estado ***j***. Todos los elementos de un individuo se suponen afectados por las mismas tasas instantáneas de transición. En las aplicaciones usuales se supone además que **todos los individuos están afectados por las mismas tasas de transición de sus elementos**, de modo que $q_{ijk} = q_{ij}$ para todo individuo ***k*** perteneciente a una determinada población o subpoblación. Las proporciones de elementos de un individuo que en un momento dado están en cada estado, v_{ik}^{t}, son en cambio específicas a cada individuo, por más que (cuando ello no introduce ambigüedad) el subíndice ***k*** a menudo es omitido indicándolas simplemente como v_{i}^{t}.

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (45) para un determinado individuo ***k*** es:

$$v_{1k}^{t+h} = v_{1k}^{t} g_{11}^{h} + v_{1k}^{t} g_{21}^{h} + \ldots + v_{1k}^{0} g_{m1}^{h}$$

....

$$v_{ik}^{t+h} = v_{1k}^{t} g_{1i}^{h} + v_{1k}^{t} g_{2i}^{h} + \ldots + v_{1k}^{0} g_{mi}^{h} \qquad \text{(Ec. 46)}$$

....

$$v_{mk}^{t+h} = v_{1k}^{t} g_{1m}^{h} + v_{1k}^{t} g_{2m}^{h} + \ldots + v_{1k}^{0} g_{mm}^{h}$$

Las cantidades g_{ij}^{h} , que se suponen **iguales para todos los individuos** al igual que las $\boldsymbol{q_{ij}}$, son **probabilidades de transición de los elementos** de un individuo, y son funciones de las tasas de transición instantánea $\boldsymbol{q_{ij}}$ y del intervalo ***h***; son análogas a las probabilidades de transición de individuos (r_{ij}^{h}) en un modelo más simple sin incertidumbre de respuesta. Son específicas para cada intervalo ***h***, e indican la probabilidad de que un **elemento** que se encontraba en el estado ***i*** en el momento ***t*** se encuentre en el estado ***j*** en el momento ***t+h***. En otros términos, permiten estimar la distribución de los elementos de un individuo en el momento ***t+h***, es decir las proporciones de estado de los elementos (v_{ik}^{t+h}) vigentes en el momento ***t+h***, a partir de las proporciones v_{ik}^{t} vigentes en el momento ***t***. La función que relaciona los valores g_{ij}^{h} con las tasas $\boldsymbol{q_{ij}}$ es una serie cuyos primeros términos son, como se vio antes en la ecuación 34 bis:

$$g_{ij}^{h} = d_{ij} + hq_{ij} + \frac{h^2}{2!}\sum_{a} q_{ia} q_{aj} + \frac{h^3}{3!}\sum_{a}\sum_{b} q_{ia} q_{ab} q_{bj} + \ldots \qquad \text{(Ec. 47)}$$

donde el primer término es la delta de Kronecker, igual a 1 si ***i=j*** e igual a cero si ***i j***. Si v_{ik}^{t} es la probabilidad de que un **elemento** del sujeto ***k*** esté en el estado ***i*** en el momento ***t***, y todos los elementos de cada individuo analizados están gobernados por las mismas tasas de transición $\boldsymbol{q_{ijk}}$, entonces la proporción v_{ik}^{t} de elementos del sujeto ***k*** que están condicionados a la respuesta ***i*** será también la probabilidad de que ese individuo proporcione la respuesta ***i***:

$$v_{ik}^{t} = P_k(i) = \frac{u_{ik}}{\sum_{j=1}^{m} u_{jk}} \qquad \text{(Ec. 48)}$$

Este esquema "microdecisional", que representa lo que ocurre con cada individuo, debe ser usado para explicar la distribución de respuestas en la población, es decir las cantidades N_i^t de sujetos que suministran la respuesta ***i*** en un determinado momento ***t***, y que representan una proporción p_i^t del total *N* de sujetos. Del mismo modo, las tasas de transición **de los elementos** de cada individuo ***k***, es decir q_{ijk}, deben ser usadas para explicar las probabilidades de transición **de los *N* individuos** entre diferentes estados, r_{ij}^h. Para encontrar una solución a este problema es preciso adoptar alguna hipótesis sobre el origen de la variabilidad de las respuestas entre los diferentes individuos.

Habría que tomar una decisión sobre la forma en que pueden variar las respuestas de diferentes individuos en un momento dado. Hay dos **posibilidades extremas: la variabilidad puramente psicológica (dentro de los individuos) y la variabilidad puramente sociológica (entre diferentes individuos).**[3]

Si la única fuente de variabilidad es **sociológica,** toda la variabilidad está **entre los individuos**, de modo que en cada momento cada individuo está totalmente determinado a favor de una respuesta determinada; en otras palabras en cada momento ***t*** hay una cantidad de sujetos cuya respuesta es ***i*** (donde ***i***=1, 2, ... ***m***). Para cada individuo, la probabilidad de dar una de las respuestas será igual a 1, y la probabilidad de dar cualquiera de las otras respuestas será 0, de modo que en definitiva una proporción p_i^t de sujetos dará la respuesta ***i***. Este es el supuesto adoptado en las secciones anteriores, donde la "respuesta" de cada sujeto se identificaba con su "estado". Hay sujetos en diferentes estados, y esta diferencia entre los individuos se traduce en sus diferentes respuestas. Cualquier cambio en las respuestas reflejará cambios en el estado de los sujetos.

[3] Los términos "variabilidad psicológica" y "variabilidad sociológica" surgen de la situación típica en la cual los sujetos son individuos, y se mide una actitud, un rasgo psicológico o una disposición subjetiva, que no son directamente observables, pero que son inferidos a través de respuestas objetivas ante determinadas preguntas. Pero el problema general que diferencia entre los estados latentes y las mediciones manifiestas se aplica también a otras clases de situaciones. Por ejemplo, el estado latente puede ser "pobreza" y los datos manifiestos pueden ser la presencia o ausencia de determinadas condiciones de bienestar como una vivienda adecuada, servicios sanitarios o acceso a la educación de los niños. Una persona puede ser "pobre" a pesar de tener vivienda adecuada, así como puede ser "no pobre" y sin embargo vivir en una vivienda inadecuada. La dualidad entre estado y respuesta surge en cualquier caso en el cual una dimensión subyacente es medida a través de indicadores observables imperfectos. Si los sujetos de estudio fuesen grupos humanos, y la variable fuese una variable relacionada con la conducta grupal como por ejemplo la elección democrática entre varias alternativas, los "elementos" podrían ser los individuos que los componen, los cuales pueden cambiar de estado (es decir de opinión) subjetivamente y así determinar la respuesta del grupo colectivamente considerado.

En la hipótesis de una pura **variabilidad psicológica,** toda la variabilidad está **dentro de los individuos**, pero **todos los sujetos son iguales**, de modo que en cada momento del tiempo todos los sujetos distribuyen sus respuestas según una distribución probabilística dada por la ecuación 47; dentro de todos los individuos hay una homogénea probabilidad ***P(i)*** de producir la respuesta ***i***, de modo que una proporción v_i^t de los sujetos producirá cada una de las respuestas ***i*** (donde ***i***=1, 2, ... ***m***). Si esta es la situación, entonces todas las diferencias en las respuestas de los sujetos se deben a incertidumbre de respuesta, y no a diferencias reales entre los sujetos, y por lo tanto todos los cambios observados en las respuestas reflejan sólo incertidumbre de las mismas, y no verdaderos cambios de los sujetos.

Obviamente, puede haber también una situación intermedia, en la cual hay por una parte procesos estocásticos a nivel de los elementos de cada individuo, y por otro cierta variabilidad también entre los diferentes individuos. El problema entonces radica en poder separar la variabilidad "psicológica" de la "sociológica", o más genéricamente la variabilidad entre los elementos componentes de cada sujeto, y la variabilidad entre sujetos. De este modo podrá decirse qué parte de los cambios observados corresponde a cambio "verdadero", y qué parte se origina en la incertidumbre de respuesta.

En primer lugar se puede notar que **para cada individuo** la secuencia de distribuciones de sus elementos, es decir el vector-fila V_i^t para diferentes fechas ***t***=0, 1, 2, ..., viene dado en forma similar a la ecuación 32 bis:

$$V_{t+h} = V_t e^{Qh} \qquad \text{(Ec. 49)}$$

donde e^{Qh} es una matriz que es, como en la ecuación 33, es la suma de una serie matricial exponencial cuyos primeros términos son los siguientes:

$$e^{Qh} = 1 + Qh + \frac{Q^2h^2}{2!} + \frac{Q^3h^3}{3!} + \frac{Q^4h^4}{4!} + \ldots \qquad \text{(Ec. 50)}$$

Cada término de la matriz e^{Qh} representa aquí la proporción de **elementos** de un individuo que se encontraban en el estado ***i*** en el momento ***t*** y en el estado ***j*** en el momento ***t+h***, es decir las probabilidades g_{ij}^h. La ecuación 49 predice la distribución **de los elementos de cada individuo** en el momento ***t+h*** a partir de la distribución en el momento ***t***, usando para ello las probabilidades de transición **de los elementos**. El problema es que así como se desconoce a distribución *V* de los elementos, también se desconocen sus probabilidades de transición g_{ij}^h. Sólo se conocen las respuestas manifiestas producidas por los individuos. El problema empírico consiste en usar los datos obtenidos sobre una muestra **de individuos** para estimar las tasas instantáneas de transición **de los elementos** dentro de cada individuo.

Las ecuaciones 46 a 50 permiten relacionar las tasas inobservables de transición instantánea de los elementos de cada individuo, ***q_ij***, con las probabilidades de que un determinado sujeto ***k*** produzca las diferentes respuestas 1, 2, ..., ***i***,... ***m***, es decir la proporción v_i^t de sus elementos que se encuentran en ese momento condicionados a favor de producir la respuesta ***i***. La tarea consiste en relacionar estas probabilidades intra-individuales v_i^t, con la proporción p_i^t de personas que efectivamente producen la respuesta ***i***, y relacionar también las probabilidades inobservables g_{ij}^h de **transición de elementos** en un intervalo de longitud ***h***, con las probabilidades observables r_{ij}^h de **transición de individuos**, las cuales indican la probabilidad de que un individuo que dio la respuesta ***i*** en el momento ***t*** produzca la respuesta ***j*** en el momento ***t+h***. Por haber admitido que hay incertidumbre de respuesta, las proporciones observadas p_i^t de sujetos que dan la respuesta ***i*** no puede tomarse como una estimación de la proporción v_i^t de elementos intra-individuales que se encuentran condicionados a dar la respuesta ***i***, ni tampoco las probabilidades r_{ij}^h de transición de los individuos, pueden tomarse como estimaciones de las probabilidades g_{ij}^h de transición de los elementos en un intervalo de longitud ***h***.

Si la variable tiene ***m*** categorías de respuesta, el estado de cada individuo en un momento cualquiera ***t*** está caracterizado por el estado de sus elementos, los cuales se distribuyen en las proporciones v_i^t para cada individuo. La proporción de elementos de un individuo que están en el estado ***i*** es v_i^t, y esa proporción varía de un individuo a otro, situándose entre 0 y 1. El conjunto de *N* individuos en el momento ***t*** puede representarse entonces mediante una distribución multivariada de frecuencias relativas con ***m-1*** dimensiones. Se consideran ***m-1*** dimensiones porque una de las categorías se obtiene por diferencia, dado que la suma de las v_i^t es igual a uno. Integrando esa distribución en todas sus dimensiones en el intervalo de 0 a 1 se llega a la solución (véase Coleman 1964a, pp.19-23). Si se tienen datos de tres momentos 0, 1 y 2, entonces para cada fila de g_{ij}^h se puede formular un sistema de ecuaciones que relaciona las **proporciones de flujo de los individuos,** $p_{ij}^{t,t+h}$, con las probabilidades de transición de los elementos, g_{ij}^h. El siguiente sistema explica las probabilidades de flujo entre los momentos 0 y 2, para todos aquellos flujos que terminan en el estado ***j***:

$$p_{1j}^{02} = p_{11}^{01} g_{1j}^{h} + p_{12}^{01} g_{2j}^{h} + \ldots + p_{1m}^{01} g_{mj}^{h}$$

....

$$p_{ij}^{02} = p_{i1}^{01} g_{1j}^{h} + p_{i2}^{01} g_{2j}^{h} + \ldots + p_{im}^{01} g_{mj}^{h} \qquad \text{(Ec. 50)}$$

....

$$p_{mj}^{02} = p_{m1}^{01} g_{1j}^{h} + p_{m2}^{01} g_{2j}^{h} + ... + p_{mm}^{01} g_{mj}^{h}$$

Debe remarcarse que las $\boldsymbol{p_{ij}}$ en estas ecuaciones son **proporciones de flujo**, es decir, cada flujo N_{ij} dividido por el número total de sujetos *N*. No deben confundirse con las **probabilidades de transición de individuos en el intervalo h,** es decir r_{ij}^{h}, que son el cociente del flujo N_{ij} entre ***t*** y ***t+h***, sobre el total de personas que en el momento inicial ***t*** estaban en el estado ***i***, es decir N_i^t. En la tabla de rotación, las $\boldsymbol{p_{ij}}$ son proporciones o porcentajes **sobre el total de la tabla**, mientras las r_{ij}^{h} son proporciones o porcentajes **sobre el total de la fila**.

Este sistema de ***m*** ecuaciones permite obtener estimaciones de las ***m*** probabilidades de transición entre los elementos correspondientes a la columna ***j***, es decir g_{ij}^{h}. Se puede repetir el procedimiento para cada una de las ***m*** categorías de la variable, formando así ***m*** sistemas de ecuaciones como el sistema (50), y resolviendo así todas las probabilidades de transición entre elementos, g_{ij}^{h}. En realidad, los sistemas necesarios son ***m***-1, porque el total de las probabilidades debe ser igual a uno, de modo que la última se obtiene por diferencia.

En términos matriciales, este conjunto de sistemas de ecuaciones puede denotarse por el siguiente producto matricial:

P(0,2)=P(0,1)G(h) (Ec. 51)

donde *P0,1)* es la matriz de las proporciones p_{ij}^{01} en el intervalo que va desde ***t*=**0 hasta ***t***=1, separados por un intervalo de longitud ***h***; y en forma análoga *R(0,2)* es la matriz de las cantidades p_{ij}^{02} para el intervalo de longitud ***2h*** entre ***t***=0 y ***t***=2. La solución para la matriz *G(h)*, que contiene todas las probabilidades g_{ij}^{h} de transición entre estados de los elementos en un intervalo ***h***, implica obtener la matriz inversa de *P0,1)*:

$P(0,1)^{-1}$ *P(0,2) = G(h)* (Ec. 52)

Estas estimaciones de g_{ij}^{h}, a su vez, pueden ser usadas para estimar las probabilidades de estado de los elementos, v_i^t, mediante las ecuaciones (46), y las tasas instantáneas de transición de los elementos, $\boldsymbol{q_{ij}}$, a partir de las ecuaciones (47). Este último paso sigue un camino similar al desarrollado para el caso general sin incertidumbre de respuesta, y procede mediante un método iterativo.

Usando similares ecuaciones una vez estimadas las probabilidades *G(h),* se puede obtener la distribución de equilibrio de los individuos entre los diferentes estados. Las ecuaciones básicas son de la forma:

$$p_i^* = p_1^* g_{1i}^h + p_2^* g_{2i}^h + \ldots + p_m^* g_{mi}^h \qquad \text{(Ec. 53)}$$

Por transposición esto se convierte en ecuaciones de la forma:

$$0 = p_1^* g_{1i}^h + p_2^* g_{2i}^h + \ldots + p_i^* (g_{ii}^h - 1) + \ldots + p_m^* g_{mi}^h \qquad \text{(Ec. 54)}$$

Este sistema se debe plantear para ***m-1*** categorías de la variable, pues la última se obtiene por diferencia debido a que la suma de todas ellas debe ser igual a 1. Esto significa que hay ***m***-1 ecuaciones independientes como la ecuación 54, más otra que es simplemente $\sum p_i^* = 1$ con las cuales se pueden estimar la distribución de equilibrio de los individuos entre las diferentes respuestas manifiestas, p_i^*, a partir de las tasas de transición entre los elementos internos de los mismos individuos.

5.3. Incertidumbre de respuesta en presencia de cambio

En la sección anterior se obtuvieron estimaciones de las tasas instantáneas de transición entre los elementos internos de cada individuo, y otras magnitudes inobservables, a partir de las tablas observables de rotación de los individuos, bajo el supuesto de que las respuestas manifiestas están sujetas a una distribución probabilística, de modo que dos sujetos idénticos (o distintas entrevistas con el mismo sujeto cuando es interrogado más de una vez) pueden producir respuestas diferentes. Ese tratamiento, sin embargo, no permitió cuantificar la incertidumbre de respuesta. Ese es el objetivo de esta sección.

La incertidumbre de respuesta podría concebirse como una tabla de rotación entre dos respuestas producidas **sin separación en el tiempo**, es decir, sin tiempo suficiente para que ocurran cambios de estado. Las celdillas de esa hipotética tabla de rotación entre ambas respuestas no separadas en el tiempo contendrán unas probabilidades (o frecuencias relativas) p_{ij}^{00}, que representan la proporción de individuos que dan la respuesta ***i*** y la respuesta ***j*** en dos experimentos simultáneos sin cambio en la posición subyacente de los sujetos. A menudo en los tests psicológicos se incluyen dos versiones muy similares de la misma pregunta o estímulo, y los resultados se usan para medir la **confiabilidad** de la pregunta: una pregunta totalmente confiable debería dar la misma respuesta en las dos versiones, de modo que todos los casos deberían situarse en la diagonal principal de la tabla de rotación; las proporciones p_{ij}^{00} serían iguales a cero para todas las celdillas ubicadas fuera de la diagonal principal (celdillas definidas por ***i*** ***j***). Si existe alguna incertidumbre de respuesta, algunas de esas celdillas fuera de la diagonal principal albergarían casos, y la confiabilidad de a respuesta sería menos que perfecta.[4] Las proporciones p_{ij}^{00} son, por lo tanto, una medida de la incertidumbre de respuesta, y en especial para los casos en que ***i j***.

Si bien la obtención empírica de las proporciones p_{ij}^{00} es difícil, y muchas veces imposible, existe la posibilidad de aplicar los procedimientos anteriormente descritos a fin de **estimar** el valor esperado de p_{ij}^{00}. También se pueden estimar las mismas proporciones para el instante 1, es decir p_{ij}^{11} o en el instante 2, o en general en el instante ***t***, o sea p_{ij}^{tt}. Para ello es necesario estimar las tasas instantáneas de transición q_{ij} y las probabilidades de transición g_{ij}^{h} sobre la base de dos períodos para luego estimar las incertidumbres de respuesta en el tercero.

Las ecuaciones 50 y 51 relacionan las rotaciones entre los períodos 0 y 1 con las rotaciones entre 0 y 2, utilizando las probabilidades g_{ij}^{h} que transforman las respuestas dadas en el momento 1 en las respuestas producidas en el momento 2. Del mismo modo se podría plantear una similar relación para el período que va del momento 0 al momento 1:

$$P(0,1)=P(0,0)G(h) \qquad \text{(Ec. 53)}$$

La matriz de incertidumbre de respuesta P(0,0) puede ser obtenida en una forma similar a la indicada en la ecuación 52 para calcular *G(h)*, usando esta vez la inversa de la matriz *G(h)* que se supone ya calculada anteriormente:

$$P(0,0)= P(0,1)\ G(h)^{-1} \qquad \text{(Ec. 54)}$$

Las estimaciones de *G(h)* obtenidas anteriormente mediante la relación entre *P(0,1)* y *P(0,2)* son usadas aquí para estimar *P(0,0)*. Es obvio que en ausencia de incertidumbre de respuesta sería *P(0,0)=**I***. En ese caso la matriz de incertidumbres de respuesta sería una matriz identidad, pues los que dieron la respuesta ***i*** en el momento ***t*** tendrían una probabilidad igual a uno de volver a dar la misma respuesta en el momento ***t+h*** o en el momento ***t-h***. Probablemente eso no sea así: si las proporciones de flujo fuera de la diagonal principal son diferentes de cero, es decir si *P(0,0)* ***I***, la diferencia permitiría estimar la incertidumbre de respuesta en el momento ***t***=0.

De modo similar se puede estimar la matriz de incertidumbre de respuesta para el momento 1, es decir:

---

[4] Estos estímulos repetidos son difíciles de aplicar en el caso de las encuestas porque el sujeto recuerda su primera respuesta y eso influye sobre la segunda; pero pueden ser aplicados con más facilidad cuando se trata de respuestas fisiológicas o de otro tipo donde no infuya la conciencia del sujeto, o bien cuando se usan dos versiones del indicador que en principio no parecen referirse al mismo tema.

$$P(1,1)=P(1,2)[G(h)]^{-1} \qquad \text{(Ec. 55)}$$

Para estimar las incertidumbres del momento final ***t***=2 hay una complicación, pues se necesitan las **probabilidades retrospectivas** g_{ij}^{h*} que indican la probabilidad de que los elementos que estaban en ***j*** en el momento ***t+h*** hayan estado en ***i*** en el momento ***t***. Las probabilidades retrospectivas de transición de elementos se calculan por un procedimiento similar (conceptualmente, una integración hacia atrás desde ***t+h*** hasta ***t***, en lugar de integrar desde ***t*** hasta ***t+h***). Véase Coleman, 1964a, pp.57-59. Estas probabilidades integran una matriz *G*(h)* con la cual se puede obtener la matriz de incertidumbres de respuesta del momento ***t=***2:

$$P(2,2)=P(1,2)[G^*(h)]^{-1} \qquad \text{(Ec. 56)}$$

Este procedimiento permite obtener para cada momento analizado (o incluso para momentos **ô** cualesquiera del pasado o del futuro) una estimación de la matriz de incertidumbre de respuesta *P(***ô, ô***)*. Este resultado puede ser el punto de partida de varios tipos de análisis.

Por ejemplo, la suma de todos los elementos de *P(***ô, ô***)* situados fuera de la diagonal principal, dividida por el número ***m*** de categorías de la variable, proporciona una medida global, w_t, con valores que varían entre 0 y 1, del grado de incidencia de la incertidumbre de respuesta en una determinada ronda del panel realizada en el momento ***t***:

$$w_t = \frac{1}{m}\sum_{j\neq i} p_{ij}^{tt} \qquad \text{(Ec. 57)}$$

El valor complementario $1-w_t$ puede considerarse como un indicador de la **certidumbre** de respuesta. Si no hay incertidumbre de respuesta la matriz *P(***ô, ô***)* es una matriz identidad, cuyos elementos no-diagonales suman cero, mientras que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1, y por lo tanto suman ***m***. En ese caso será $w_t=0$. Un valor de w_t superior a cero sugiere que los datos podrían ser explicados mediante la combinación de un proceso de Markov gobernando los cambios en los elementos latentes, y un cierto grado de incertidumbre en la respuesta manifiesta. En forma similar, si se define una matriz **D=[*I* -- *P(*ô, ô*)]*^{2},** la suma de sus elementos ***Ódij*** tiene una distribución ÷^{2} con ***m(m-1)*** grados de libertad, que permite evaluar si la incertidumbre de respuesta es estadísticamente significativa.

6. Modelos multivariados de panel con variables categóricas

Los modelos multivariados de panel tratan de postular relaciones entre diferentes variables, observadas en diferentes fechas, de las cuales se puedan deducir los datos observados. Las hipótesis en que se basan esos modelos son usualmente hipótesis **causales**, las cuales postulan que existe algún proceso de influencia de una variabe sobre otra, de modo que un cambio en una variable **induce** cambios en otra. La postulación de relaciones causales es un complejo probema epistemológico, cuyas dificultades a menudo se proyectan sobre los problemas prácticos del investigador; en esta presentación, sin embargo, esta problemática no será considerada.[5] En los procesos multivariados no interesa solamente estudiar los cambios en la ubicación de los sujetos entre diferentes valores de la misma variable, sino la relación entre diferentes variables a lo largo del tiempo, estudiada a través de los datos de panel.

6.1. Algunos aspectos conceptuales de la causación

Uno de los principales problemas que surgen en este tema, y que también se presenta en el caso de paneles con variables cuantitativas, es el carácter arbitrario de las fechas elegidas para realizar las rondas del panel, las cuales no tienen por qué coincidir con los intervalos relevantes para estudiar efectos causales. Hay sin duda procesos causales que operan a intervalos fijos; por ejemplo, la cantidad de niños en cuarto grado en el primer mes del año escolar es una función directa de los resultados finales del año escolar anterior, registrados tres o cuatro meses antes. En cambio, entre el primer y cuarto mes de clases no habría cambios comparables. Las fechas en que ocurren los cambios, y las demoras entre causas y efectos, están determinadas por el proceso mismo.

En cambio hay otros procesos que operan de manera prácticamente continua, sin fechas predeterminadas para dar saltos de un estado a otro. Los cambios en la situación laboral de las personas ocurren en cualquier momento, y obedecen a factores que pueden haber ocurrido inmediatamente antes, o un mes antes, o tres meses antes. La cantidad de personas desocupadas en la ronda de abril de una encuesta de empleo no tiene por qué explicar o predecir la situación laboral de esas personas en octubre, pues los sucesos desencadenantes de esta última pueden perfectamente haber ocurrido en los meses intermedios. Por otra parte, el período necesario para que las causas produzcan sus efectos puede ser un período variable, de modo que algunas personas sufren el efecto antes que otras. Al momento de la segunda ronda algunos efectos de la situación de abril no se habrán todavía producido, otros ya habrán ocurrido pero habrán sido eclipsados por eventos ulteriores, y la situación en la segunda ronda será

[5] Hay una vasta bibliografía sobre causalidad en epistemología y en disciplinas específicas como la economía y la sociología. Sólo para indicar algunas lecturas: Popper [1934], cap.III; Simon (1952 y 1987), Bunge (1979), Davis (1985); Schuster (1982). Para la aplicación de modelos causales en las ciencias sociales puede verse Blalock (1964, 1969, 1985). Véase también Eerola 1994.

entonces la resultante de una variedad de causas, distribuidas en el tiempo a lo largo de los meses precedentes, sin que sea posible aislar específicamente el efecto que tuvo la situación registrada en abril.

Dejando de lado por ahora este problema, supóngase de todas maneras un modelo causal con dos variables X e Y. Estas variables pueden concebirse como variables cuantitativas, o bien como variables dicotómicas codificadas con cero para la ausencia y uno para la presencia de determinada característica o atributo. Si fuesen variables politómicas de tipo nominal u ordinal el modelo debería modificarse, pero no es necesario introducir esa complicación ahora.

Las relaciones causales entre estas variables pueden ser de dos tipos: sincrónicas o diacrónicas. En una relación causal sincrónica, el estado de una variable en el momento ***t*** influye sobre el estado de la misma o de otra variable en el mismo momento ***t***. En una relación causal diacrónica, el estado de una variable en ***t-1*** influye sobre el estado de la misma o de otra variable en ***t***. El intervalo entre ***t-1*** y ***t***, en este caso, debe ser suficientemente largo para que el efecto se produzca, y no tan largo que ese efecto se esfume o diluya antes de ser registrado.

La causación muchas veces es concebida como un proceso que **necesariamente** involucra el paso del tiempo, de modo que la causación estrictamente sincrónica, en realidad, no podría existir. Cualquier influencia necesita algún tiempo para transmitirse, aunque ese tiempo sea muy breve. Toda causación, entonces, es diacrónica. Sin embargo, para fines prácticos muchos efectos **aparecen** en una forma sincrónica con sus causas porque son registrados o medidos al mismo tiempo. Si bien hay seguramente algún intervalo entre la causa y el efecto, ambos varían en estrecha concomitancia, por lo cual pueden ser considerados como sincrónicos o cotemporales.

Otro aspecto de los procesos causales es que ellos pueden ser unidireccionales o de causación recíproca. En un modelo unidireccional, **X** provoca cambios en **Y**, pero los cambios de **Y** no tienen ninguna influencia (directa o indirecta) sobre **X**. En un modelo de causación recíproca ocurre lo contrario. Cuando un modelo de causación recíproca es diacrónico las relaciones son más claras: $X_t \rightarrow Y_{t+1} \rightarrow X_{t+2} \rightarrow Y_{t+3} \rightarrow$**...** En un modelo de causación sincrónico las dos variables se influyen mutuamente sin que medie el paso del tiempo, lo que dificulta la identificación de cada influencia. En un proceso diacrónico de causación recíproca, donde se asume que el "intervalo de causación" que transcurre entre la causa y el efecto es aproximadamente igual al intervalo entre las observaciones, el estado de las variables en el momento ***t*** dependerá del estado de ambas variables en el momento ***t-1*** y de factores aleatorios no controlados (å). Si se tratase de variables cuantitativas y la relación entre ellas fuese lineal, los vínculos causales diacrónicos y recíprocos podrían representarse a través del siguiente sistema de ecuaciones:

$$Y_t = \hat{a}_{XY} X_{t-1} + \hat{a}_{YY} Y_{t-1} + \mathring{a}_Y \qquad \text{(Ec. 58)}$$

$$X_t = \hat{a}_{XX} X_{t-1} + \hat{a}_{YX} Y_{t-1} + \mathring{a}_X \qquad \text{(Ec. 59)}$$

En este modelo causal no hay causación sincrónica, es decir, procesos causales que operen en el mismo período: los únicos efectos previstos son de un período sobre el siguiente. La introducción de efectos sincrónicos recíprocos daría lugar a las siguientes ecuaciones, donde el valor de cada variable en ***t*** no depende solamente de los valores en ***t-1*** sino también del valor de la otra variable en el mismo período ***t:***

$$Y_t = \hat{a}_{XY} X_{t-1} + \hat{a}_{YY} Y_{t-1} + \acute{a}_{XY} X_t + \mathring{a}_Y \qquad \text{(Ec. 60)}$$

$$X_t = \hat{a}_{XX} X_{t-1} + \hat{a}_{YX} Y_{t-1} + \acute{a}_{YX} Y_t + \mathring{a}_X \qquad \text{(Ec. 61)}$$

El esquema de las ecuaciones 60 y 61 corresponde a un modelo muy genérico que suele denominarse "modelo cruzado con retardos" (*cross-lagged model*: véase por ejemplo Finkel 1995, pp.24-31). Los vínculos causales **directos** involucrados en estas ecuaciones (dejando de lado los factores aleatorios) son los siguientes:

Orden temporal del vínculo	Vínculo	Coeficiente
Diacrónico	$X_{t-1} \rightarrow Y_t$	$\hat{a}_{XY}$
	$X_{t-1} \rightarrow X_t$	$\hat{a}_{XX}$
	$Y_{t-1} \rightarrow X_t$	$\hat{a}_{YX}$
	$Y_{t-1} \rightarrow Y_t$	$\hat{a}_{YY}$
Sincrónico	$X_t \rightarrow Y_t$	$\acute{a}_{XY}$
	$Y_t \rightarrow X_t$	$\acute{a}_{YX}$

Sin embargo, en la mayor parte de los procesos causales la influencia causal opera en forma **continua**, y no entre puntos discretos del tiempo. Por tal razón es preferible conceptualizar el proceso causal como un proceso continuo si bien las observaciones empíricas sólo ocurren a intervalos discretos. Esto implica formalizar las relaciones entre variables como un proceso continuo, en el cual cada cambio en una de ellas determina un cambio en otra u otras. En el case de las variables categóricas ese proceso es un **proceso continuo de cambios de estado** en una variable dependiente determinado por el estado de otra u otras variables, o por el cambio de estado de otras variables.

En un estudio transversal o sincrónico, cuando se observan correlaciones entre tres o más variables a menudo se utilizan los coeficientes de correlación parcial (Blalock 1964) o de regresión parcial o "path coefficients" (Boudon 1967) para seleccionar el conjunto de vínculos causales que mejor se ajusta a los datos. Por ejemplo, si la correlación de X_{t-1} con Y_t controlando Z_{t-1} es más grande que la de Z_{t-1} con Y_t controlando X_{t-1} podría suponerse que X tiene mayor influencia que Z sobre la variable Y. En un temprano intento en el mismo sentido, Pelz y Andrews (1964) intentaron aplicar ese método a los estudios de panel a fin de establecer "prioridades causales" de una manera sistemática; sin embargo, ese enfoque en general se ha revelado erróneo, porque la correlación obedece no sólo a esas variables sino a factores aleatorios, y puede por lo tanto conducir a resultados equívocos o absurdos. En cambio las propuestas metodológicas para el análisis causal con variables categóricas se ha orientado más bien en dirección a la identificación de procesos continuos, ya sea mediante el enfoque inaugurado por Coleman (1964, 1991) o mediante modelos log-lineales (véase por ejemplo Hagenaars 1990 o el capítulo 11 de Agresti 1990), si bien estos últimos no han tenido un desarrollo comparable todavía en lo que se refiere a estudios de panel.

6.2. Procesos causales continuos con variables categóricas

Supóngase que la variable de interés es ***Y***, una variable categórica con ***m*** categorías. Cada individuo o unidad de análisis está sujeto permanentemente a la posibilidad de cambiar de estado. Su **tasa instantánea de transición** de un estado a otro es, en la notación que se ha usado anteriormente, q_{ij}. En cualquier pequeño intervalo de tiempo ***dt***, la probabilidad de un sujeto ubicado en el estado ***i*** de pasar al estado ***j*** es $q_{ij}dt$. Del mismo modo, la probabilidad de un sujeto ubicado en el estado ***j*** de pasar al estado ***i*** es $q_{ji}dt$. Por lo tanto la tasa de variación de la probabilidad de estar en el estado ***i*** sería igual a la suma algebraica de estas probabilidades de entrada y salida. Cuando hay sólo dos estados 0 y1 la tasa de variación de p_1 sería:

$$\frac{dp_1}{dt} = q_{01}p_0 - q_{10}p_1 \qquad \text{(Ec. 62)}$$

La expresión para p_0 sería similar aunque los términos de la derecha aparecerían cambiados de signo:

$$\frac{dp_0}{dt} = -q_{01}p_0 + q_{10}p_1 \qquad \text{(Ec. 63)}$$

Esto significa que la tasa de variación de p_0 es simplemente la tasa de variación de p_1 cambiada de signo:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{dp_1}{dt} \qquad \text{(Ec. 64)}$$

Para variables con más de dos categorías las ecuaciones sufren una transformación trivial ya que hay que sumar todos los posibles estados con que puede tener intercambios el estado ***i***:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j (q_{ji} p_j - q_{ij} p_i) \qquad \text{(Ec. 65)}$$

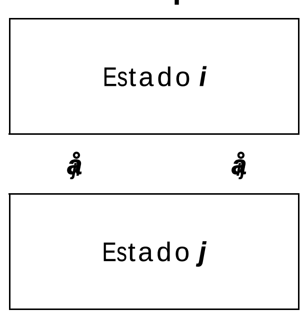
6.2.1. Cambio sin factores causales explícitos

Si la variable ***Y*** fuese independiente de toda otra variable, es decir, si no operase sobre ***Y*** ninguna influencia causal sistemática, los cambios de estado serían eventos puramente aleatorios. En todo instante algunos individuos pasarían de ***i*** a ***j***, mientras que otros pasarían de ***j*** a ***i*** (donde tanto ***j*** como ***i*** pueden variar de 1 a ***m***). Cuáles individuos sufrirían estos cambios de estado sería intrínsecamente impredecible, ya que todos tienen la misma probabilidad de sufrirlos. En esta situación de ausencia de factores causales sistemáticos, las tasas instantáneas de transición equivalen al efecto de una multitud de factores aleatorios no identificados, que pueden resumirse en el símbolo $\mathring{a}_{ji}$ que significa "influencias aleatorias que favorecen el cambio desde el estado ***j*** hacia el estado ***i***". El estado ***j*** aquí incluye el propio estado de origen, ***i***, de modo que incluye aquellas influencias aleatorias que provocan el **cambio** de estado del sujeto desde ***i*** hacia algún otro estado, o sea $\mathring{a}_{ji}$ (para ***i*** ***j***), y también las influencias aleatorias que hacen **permanecer** al sujeto en el mismo estado ***i***, es decir $\mathring{a}_{ii}$. Para cada estado ***j*** esto significa que $q_{ji}=\mathring{a}_{ji}$ y para el conjunto de estados ***j***:

$$\sum_j q_{ji} = \sum_j \mathring{a}_{ji} = \mathring{a}_i \qquad \text{(Ec. 66)}$$

donde $\mathring{a}_i$ representa el conjunto de efectos aleatorios que influyen sobre la probabilidad de que un sujeto se encuentre en el estado ***i*** en un momento cualquiera. Entre dos estados ***i*** y ***j***, habrá en cada instante un flujo en ambas direcciones, determinado por el conjunto de los factores aleatorios $\mathring{a}_{ij}$ desde el estado ***i*** hacia el estado ***j***, y por los factores aleatorios $\mathring{a}_{ji}$ desde ***j*** hacia ***i***.

Cambios en el atributo Y por factores aleatorios



Si los factores aleatorios que operan a favor del ingreso en cada estado están balanceados con los factores que impulsan a salir de él, es decir si es $\mathring{a}_{ij} = \mathring{a}_{ji}$, la probabilidad de que un sujeto esté en un determinado estado será constante, y la cantidad de sujetos en cada estado también será constante, en cuyo caso se dirá que el proceso se encuentra en un **equilibrio estable**.

6.2.2. Factores causales

Los efectos aleatorios pueden concebirse como una multitud de causas que operan sobre cada sujeto, cada una con un efecto particular a favor o en contra de la probabilidad de que ese sujeto se encuentre en el estado ***i***, influyendo para mantenerlo en su estado actual o impulsándolo a pasar a otro estado. De ese universo de factores, el análisis multivariado aísla explícitamente algunos factores X_1, X_2, etc., para considerarlos como "causas" o "variables independientes", dejando que el resto de los factores quede subsumido en el residuo aleatorio $\mathring{a}_i$. De este modo se efectúa una partición de q_{ij} en dos partes: una de ellas determinada por estos factores cualitativos identificados como causas, y el resto determinado por factores aleatorios.

Para cada individuo ***k*** y para cada tasa q_{ij} se tendrá entonces:

$$q_{ij}^{k} = \hat{a}_{1ijk} X_{1k} + \hat{a}_{2ijk} X_{2k} + \ldots + \hat{a}_{gijk} X_{gk} + \ldots + \mathring{a}_{ijk} \quad \text{(Ec. 67)}$$

donde los símbolos tienen el siguiente significado:

q_{ij}^{k} = Tasa instantánea de transición del estado ***i*** al estado ***j*** para el individuo ***k***.

$\hat{a}_{gijk}$ = Efecto del atributo cualitativo X_g a favor de que el individuo ***k*** cambie de ***i*** a ***j***.

X_{gk} = Valor del atributo Xg para el individuo ***k***.

$\mathring{a}_{ijk}$ = Efectos aleatorios debidos a otros factores no considerados explícitamente, a favor de que el individuo ***k*** pase del estado ***i*** al estado ***j***.

Cuando se ha estimado la tasa de transición q_{ij}, la introducción de factores explicativos X_i permite **particionar** la tasa de transición en una porción que responde a un factor X_1, otra que responde a otro factor X_2, etc., y un residuo no explicado que se supone aleatorio.

6.3. Efectos causales en un corte transversal

En esta sección se exploran los modelos causales aplicables entre variables categóricas **en un corte transversal**, sin introducir todavía la dimensión temporal, es decir, sin aplicar diseños longitudinales. La introducción de otras variables categóricas como posibles variables independientes que explicarían causalmente la variable ***Y*** implica pensar que las tasas de transición entre distintos estados de la variable Y serán diferentes para cada individuo, según los valores que ese individuo tenga en las variables *X*. La tasa de transición laboral que afecta a un individuo, por ejemplo, podría ser diferente según su sexo, su nivel educativo, su experiencia laboral anterior u otros factores relevantes.

6.3.1. Variables dicotómicas con un solo factor independiente

Comenzaremos con **variables dicotómicas** pues como se ha visto la generalización a variables con múltiples categorías no ofrece mayores dificultades. La variable dependiente *Y* es una variable dicotómica, como por ejemplo la intención de votar por un determinado candidato, que puede tener sólo dos estados codificados con 0 y 1. Se introduce un solo factor causal, la variable dicotómica *X* que consiste en la presencia o ausencia de determinado atributo (por ejemplo conocer o no conocer las propuestas del candidato en cuestión). La variable X está también codificada con 0 (ausencia del atributo) y 1 (presencia del atributo), y se supone que los códigos han sido elegidos de tal modo que la presencia del atributo favorece el ingreso en el estado 1 de la variable dependiente *Y,* entonces las tasas de transición de Y=0 a Y=1 para el sujeto ***k*** serán:

Individuos con X=0: $q_{01}^{k} = \mathring{a}_{01k}$ $q_{10}^{k} = \mathring{a}_{10k}$ (Ec. 68)

Individuos con X=1: $q_{01}^{k} = \hat{a}_{X01k} + \mathring{a}_{01k}$ $q_{10}^{k} = \mathring{a}_{10k}$ (Ec. 69)

La presencia del atributo X modifica el flujo desde Y=*0* hacia *Y=1*

Individuos con X=0	**Individuos con X=1**
Estado *Y=0*	**Estado *Y=0***
$\mathring{a}_0$ $\mathring{a}_1$	$\mathring{a}_0$ $\hat{a}_{X01} + \mathring{a}_1$
Estado *Y=1*	**Estado *Y=1***

En este modelo teórico, la presencia del atributo *X* incrementa el flujo desde ***i*** hacia ***j***, pero su ausencia no tiene ningún efecto especial. En otros términos, en ausencia de *X* los individuos se mueven entre Y=0 e Y=1 impulsados únicamente por factores aleatorios; pero en presencia de *X*=1 hay un incremento del flujo desde Y=0 hacia Y=1 representado por el coeficiente $\hat{a}_{X01}$. Estos flujos podrían ser estimados a partir de una tabla cruzada de *X* con nuestra variable dependiente *Y* aunque no se cuente con datos de panel, **si se asume que la tabla representa el estado de equilibrio**. Supóngase por ejemplo que se tiene la siguiente tabla:

	Atributo Y		
Atributo X	**Y=0**	**Y=1**	**Total**

X=0	N_{00} = 300	N_{01} = 200	500
X=1	N_{10} = 100	N_{11} = 400	500
Total	400	600	1000

Según se vio anteriormente para tablas de rotación, en un estado de equilibrio los flujos de entrada y salida en cada estado de *Y* deben estar balanceados. Las frecuencias de cada celdilla interior se denominan N_{ij} donde ***i*** representa uno de los valores de X mientras que ***j*** representa uno de los valores de Y**.** Ahora bien, la tabla observada empíricamente puede o no representar una situación de equilibrio. Se ignora si ella variaría en caso de ser observada en algún otro momento. Pero en ausencia de información específica, y si la observación se tomó en un momento cualquiera, es posible asumir que el proceso se encontrase en esa situación. **En una situación de equilibrio** deben cumplirse las siguientes igualdades:

Para los individuos con valor X=0: $\mathring{a}_{01}N_{00} = \mathring{a}_{10}N_{10}$ (Ec. 70)

Para los individuos con valor X=1: $(\hat{a}_{X01} + \mathring{a}_{01})N_{01} = \mathring{a}_{10}N_{01}$ (Ec. 71)

Esto permite estimar el valor relativo, pero no absoluto, de los coeficientes. Nótese que $\mathring{a}_{01}/\mathring{a}_{10}=N_{10}/N_{00}$. Denominando $\boldsymbol{p_{01}}$ a la proporción de personas en el estado 1 de la variable dependiente *Y* respecto al total de personas en el estado 0 de la variable X (200/500 en la tabla precedente), y $\boldsymbol{p_{11}}$ a la proporción en el estado 1 de *Y* respecto al total de personas con *X*=1 (400/500 en la tabla), rápidamente se deducen las siguientes equivalencias:

$$p_{01} = \frac{\hat{a}_{X01} + \mathring{a}_{01}}{\hat{a}_{X01} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} \qquad \text{(Ec. 72)}$$

$$p_{11} = \frac{\mathring{a}_{01}}{\hat{a}_{X01} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} \qquad \text{(Ec. 73)}$$

Se puede fácilmente obtener el valor relativo de cada coeficiente respecto a la suma de los tres, usando como ejemplo los valores numéricos del ejemplo anterior:

Efecto de X hacia el estado Y=1

$$\frac{\hat{a}_{X01}}{\hat{a}_{X01} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} = \frac{p_{01} - p_{11}}{1 - p_{11}} = \frac{0.40 - 0.80}{0.20} = -2 \qquad \text{(Ec. 74)}$$

Efectos aleatorios hacia el estado Y=1

$$\frac{\mathring{a}_{01}}{\hat{a}_{X01} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} = \frac{p_{11}(1 - p_{01})}{1 - p_{11}} = \frac{0.80(1 - 0.40)}{0.20} = 2.4 \qquad \text{(Ec. 75)}$$

Efectos aleatorios hacia el estado Y=0

$$\frac{\mathring{a}_{10}}{\hat{a}_{X01}+\mathring{a}_{01}+\mathring{a}_{10}} = 1 - p_{01} = 1 - 0.40 = 0.60 \qquad \text{(Ec. 76)}$$

Los tres efectos, naturalmente, suman uno: –2.0 + 2.4 + 0.60 = 1.0. Cada uno de los componentes puede ser visto como aquella parte de la variación en la proporción de personas en el estado Y=1 que se debe a cada una de estas tres causas: el efecto de X=1, y los efectos aleatorios en ambas direcciones. Según este ejemplo, los efectos aleatorios más poderosos son aquellos que influyen a las personas para que pasen del estado 0 al estado 1, es decir $\mathring{a}_{01}$ = 2.40. Los efectos aleatorios en la dirección contraria son cuatro veces más pequeños $\mathring{a}_{10}$ =0.60. Y además, el efecto del atributo X consiste en inhibir fuertemente el flujo desde Y=0 hacia Y=1, ya que su valor es $\hat{a}_{X01}$ = – 2.0.

En este ejemplo, X tiene efecto cuando vale X=1, pero no cuando X=0. Esto es aceptable cuando se trata de variables que consisten en la **ausencia o presencia** de un atributo, como por ejemplo tener o no tener educación superior. Es posible, sin embargo, que el atributo *X* tenga efecto **en ambos sentidos**. Esto ocurre con aquellas variables cuyas categorías no representan presencia o ausencia sino **diferentes posibilidades cualitativas**. Por ejemplo, si *X*=Sexo, podría ser que los individuos de uno de los sexos tengan mayor tendencia a fluir desde ***i*** hacia ***j*** mientras los individuos del otro sexo tienen mayor tendencia a fluir desde ***j*** hacia ***i***, como se indica en el siguiente diagrama. Aquí se usa implícitamente el artificio de dividir la variable "Sexo" en dos variables dicotómicas conjugadas: "Ser varón" y "Ser mujer". Se supone que $\hat{a}_{V10}$ opera cuando "Ser varón"=1 y "Ser mujer"=0, y que $\hat{a}_{M10}$ actúa en el caso opuesto, cuando "Ser varón"=0 y "Ser mujer"=1.

Efectos dobles: Una de las categorías del atributo X aumenta el flujo desde 1 hacia 0, y la otra categoría tiene el efecto opuesto

X=Varón		**X=Mujer**	
Estado Y=0		Estado Y=0	
$\hat{a}_{V10}+\mathring{a}_{0}$	$\mathring{a}_{1}$	$\mathring{a}_{0}$	$\hat{a}_{M01}+\mathring{a}_{1}$
Estado Y=1		Estado Y=1	

En este caso, como se ve, hay dos efectos de dirección opuesta. El valor *X*=V (varón) incrementa uno de los flujos mientras el valor *X*=M (mujer) incrementa el otro. En este caso, una tabla cruzada sincrónica es insuficiente para estimar el valor (absoluto o relativo) de los cuatro coeficientes. Ello sólo sería posible con datos de panel, como se verá luego. Sin embargo, aun en el caso de un corte transversal resulta posible la estimación si se utiliza algún supuesto simplificador. Por ejemplo, podría adoptarse la hipótesis de que el efecto $\hat{a}_{V10}$ de ser varón es de igual magnitud que el efecto contrario $\hat{a}_{M01}$ de ser mujer. Si $\hat{a}_{V01}=\hat{a}_{M10}=\hat{a}$, los efectos relativos pueden estimarse en forma similar al caso anterior. Las proporciones de varones y mujeres serían:

$$p_{01} = \frac{\hat{a} + \mathring{a}_{01}}{\hat{a} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} \qquad \text{(Ec. 77)}$$

$$p_{11} = \frac{\mathring{a}_{01}}{\hat{a} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} \qquad \text{(Ec. 78)}$$

De estas equivalencias se desprende fácilmente:

Efecto de ser varón hacia Y=1, o de ser mujer hacia Y=0

$$\frac{\hat{a}}{\hat{a} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} = p_{V1} - p_{M1} = 0.40 - 0.80 = -0.40 \qquad \text{(Ec. 79)}$$

Efectos aleatorios hacia Y=1

$$\frac{\mathring{a}_{01}}{\hat{a} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} = p_{11} = 0.80 \qquad \text{(Ec. 80)}$$

Efectos aleatorios hacia Y=0

$$\frac{\mathring{a}_{10}}{\hat{a} + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} = 1 - p_{01} = 1 - 0.40 = 0.60 \qquad \text{(Ec. 81)}$$

Si la variable Y fuera la intención de votar (1) o no votar (0) por un cierto candidato, la importancia relativa del flujo aleatorio entre los dos estados (que opera para ambos sexos por igual) es de 0.80 desde 0 hacia 1, y de 0.60 desde 1 hacia 0. El efecto del sexo es doble: a los varones les reduce el flujo desde 0 hacia 1, y a las mujeres les reduce el flujo desde 1 hacia 0. En otros términos, ser varón obstaculiza la decisión de pasar a tener una intención positiva de voto, mientras que ser mujer dificulta la decisión de pasar a tener una intención negativa. Estos resultados, por supuesto, dependen de la validez del supuesto de que el efecto de ser varón es de igual magnitud que el efecto de ser mujer, aunque de sentido opuesto.

Como se ve, ambos modelos arrojan diferentes resultados numéricos, y no hay en los datos de corte transversal nada que permita escoger uno de ellos, ni que permita decidir si los dos efectos del sexo son iguales o diferentes. Si el marco teórico subyacente indica que el atributo X corresponde a la presencia o ausencia de algo, se impone la primera solución: el atributo X tiene influencia cuando está presente, y no la tiene cuando está ausente. En cambio, si el modelo teórico asume que X=1 indica la presencia de algo, mientras X=0 no indica la ausencia de ese algo sino la presencia de otra cosa, como por ejemplo cuando X=Sexo, ambas categorías de X pueden tener efectos propios, de direcciones opuestas y (por simplicidad) de igual magnitud, entonces el segundo modelo sería el apropiado. Sólo con datos longitudinales o de panel se podría obtener en los datos algún elemento que permita decidir cuál de los dos modelos teóricos es el apropiado en un caso particular, así como la magnitud relativa de los dos efectos del sexo (el efecto de ser varón y el efecto de ser mujer).

6.3.2. Análisis transversal multivariado con dicotomías

El análisis precedente, con un factor causal dicotómico, puede ser extendido al caso más general en que hay **varios** factores causales, siempre de tipo dicotómico. Posteriormente se generaliza este enfoque a variables categóricas con más de dos categorías. Supóngase que se tiene una variable dependiente dicotómica ***Y*** y tres factores independientes dicotómicos ***X***, ***W*** y ***Z***. Por ejemplo, con ***Y***=Intención de votar al candidato ***A***, los factores podrían ser ***X***= Educación universitaria; ***W***=Información sobre las propuestas del candidato; y ***Z***=Simpatizante del partido político del candidato A. Cada factor podría tener efecto solamente cuando está presente (es decir, cuando su valor es 1), o podría tener efectos diferenciados en sus dos valores (un efecto cuando vale 0, y otro efecto cuando vale 1). En otras palabras, puede tener un efecto "simple" o "doble". Por el momento propondremos el caso de un efecto "simple". Supondremos también que los tres factores son **aditivos**: el efecto de cada uno se suma al efecto de los demás sin **interacción**. Esto conduce al modelo siguiente:

$$q_{01:xwz}= \hat{a}_X X+ \hat{a}_W W+ \hat{a}_Z Z+ \mathring{a}_{01} \qquad \text{(Ec. 82)}$$

$$q_{10} = \mathring{a}_{10} \qquad \text{(Ec. 83)}$$

La **primera ecuación del modelo** dice que cada subgrupo de sujetos tendrá diferente tasa de transición según su combinación de valores en las variables independientes. La notación $q_{01:xwz}$ indica la tasa de transición de 0 a 1 de aquellos individuos con ciertos valores en X, W y Z. Los sujetos con educación universitaria (X=1), informados sobre el candidato (W=1) y simpatizantes del partido (Z=1) tendrán una tasa de transición desde "No tener intención de votar al candidato A" hacia "Tener intención de votarlo" equivalente a: $q_{01:111}=\hat{a}_X+\hat{a}_W+\hat{a}_Z+\mathring{a}_{01}$. Los que no tengan estudios universitarios pero tengan información sobre el candidato y simpatía partidaria tendrán $q_{01:011}= \hat{a}_W + \hat{a}_Z + \mathring{a}_{01}$. Aquellos que sean simpatizantes del partido ***Z*** pero carezcan de estudios superiores y desconozcan las propuestas del candidato tendrán $q_{01:001}= \hat{a}_Z + \mathring{a}_{01}$. Y lo mismo para otras combinaciones. Si tienen cero en las tres variables, su tasa será $q_{01:000} = \mathring{a}_{01}$. La **segunda ecuación del modelo** sostiene que la posibilidad de pasar de 0 a 1 en la intención de voto es la misma para todos ($q_{10} = \mathring{a}_{10}$): la ausencia de X,W y Z no tiene ningún efecto especial.

Si no se dispone de datos de panel sino que se cuenta solamente con datos transversales, no se tiene información directa sobre la cantidad de sujetos que cambian de opinión, sino sólo una "fotografía" tomada en un momento dado. Si se supone que ese momento representa una situación de equilibrio, es decir que los flujos hacia y desde ***Y***=1 están compensados entre sí, es posible tener, como antes, una estimación de la importancia relativa de cada coeficiente (aunque no su magnitud absoluta).

En forma similar al caso de un solo factor independiente, las proporciones **esperadas** en el estado 1 de la variable dependiente Y pueden ser expresadas en función de los coeficientes del modelo. Para ello la notación será análoga a la indicada para las tasas de transición: p_{111} es la proporción que está en el estado 1 de Y (tiene intención de votar al candidato A) entre aquellos sujetos que tienen respuesta positiva en las tres variables independiente XWZ, y en general p_{xwz} es la proporción que piensa votar por el candidato entre aquellos que tienen una cierta combinación de valores de X,W y Z. Añadiremos además un asterisco para indicar que se trata del valor esperado que debería tener la proporción en condiciones de equilibrio si los datos respondieran al modelo. Para algunas de las combinaciones resulta por ejemplo:

$$p^*_{000} = \frac{\mathring{a}_{01}}{\hat{a}_X + \hat{a}_W + \hat{a}_Z + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} \quad \text{(Ec. 84)}$$

$$p^*_{100} = \frac{\hat{a}_X + \mathring{a}_{01}}{\hat{a}_X + \hat{a}_W + \hat{a}_Z + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} \quad \text{(Ec. 85)}$$

$$p^*_{111} = \frac{\hat{a}_X + \hat{a}_W + \hat{a}_Z + \mathring{a}_{01}}{\hat{a}_X + \hat{a}_W + \hat{a}_Z + \mathring{a}_{01} + \mathring{a}_{10}} \quad \text{(Ec. 86)}$$

Del mismo modo se pueden formular las otras combinaciones (001, 010, 101, 110 y 011). El numerador es la suma de los coeficientes activos en cada combinación de valores de X, W y Z, y el denominador es la suma de todos los coeficientes. Para simplificar la notación, denominaremos b_X al cociente de $\hat{a}_X$ sobre la suma de todos los coeficientes, y de igual manera definiremos b_W, b_Z, e_{01} y e_{10}, de modo que la suma de los cinco coeficientes es igual a la unidad. Estos coeficientes estandarizados pueden ser estimados por una variante del método de mínimos cuadrados, es decir, minimizando la suma (elevada al cuadrado) de las diferencias entre las proporciones observadas *p* y las proporciones esperadas *p** incluidas en las precedentes ecuaciones, es decir minimizando $\sum (p_{xwz} - p^*_{xwz})^2$. Tal como demuestra Coleman (1964b, pp.196-197), esto conduce a expresiones muy simples para los coeficientes estandarizados ***b*** y ***e***. En este caso se estiman cuatro de ellos y se estima el último por diferencia ya que su suma es igual a uno. Los tres coeficientes b_X , b_W y b_Z se estiman como promedio de las diferencias entre las proporciones observadas en presencia y en ausencia de cada variable:

$$b_X = \frac{(p_{100} - p_{000}) + (p_{110} - p_{010}) + (p_{101} - p_{001}) + (p_{111} - p_{011})}{4} \quad \text{(Ec. 87)}$$

$$b_W = \frac{(p_{010} - p_{000}) + (p_{110} - p_{100}) + (p_{011} - p_{001}) + (p_{111} - p_{101})}{4} \quad \text{(Ec. 88)}$$

$$b_Z = \frac{(p_{001} - p_{000}) + (p_{101} - p_{100}) + (p_{110} - p_{010}) + (p_{111} - p_{110})}{4} \quad \text{(Ec. 89)}$$

El coeficiente estandarizado de efectos aleatorios hacia el estado 1, es decir e_{01}, resulta ser:

$$e_{01} = \frac{2p_{000} + p_{100} + p_{010} + p_{001} - p_{111}}{4} \quad \text{(Ec. 90)}$$

El último coeficiente estandarizado, e_{10}, se obtiene por diferencia:

$$e_{10} = 1 - b_X - b_W - b_Z - e_{01} \quad \text{(Ec. 91)}$$

Este procedimiento puede generalizarse fácilmente a un número cualquiera de factores dicotómicos aditivos. Si existen ***m*** atributos dicotómicos independientes, la fórmula general para un coeficiente estandarizado b_X para un atributo independiente cualquiera ***X*** será:

$$b_X = \frac{\sum_{c=1}^{c=2m-1}(p_{xc} - p_c)}{2^{m-1}} \quad \text{(Ec. 92)}$$

donde "***c***" representa una determinada combinación de los demás factores (además de ***X***) que intervienen en el modelo. En esta notación, p_{xc} es la proporción de sujetos en el estado 1 de la variable dependiente, entre aquellos que tienen valor 1 en ***X*** y en una determinada combinación ***c*** de otros factores. En cambio, p_c es la proporción en el estado 1 para aquellos sujetos que tienen la misma combinación **c** pero para quienes el atributo ***X*** vale cero. Si hay ***m*** factores dicotómicos independientes habrá en total 2^m proporciones p_c y p_{xc}. Para cada atributo ***X*** habrá una cantidad de pares de proporciones a comparar equivalente a la mitad de 2^k, es decir $2^k/2 = 2^{k-1}$ (en el caso de tres atributos X, W y Z esas diferencias son cuatro, es decir 2^{3-1}). Para el coeficiente estandarizado e_{01} correspondiente a los efectos aleatorios que estimulan el pasaje del estado 0 al estado 1 la fórmula general es la siguiente:

$$e_{01} = \frac{1}{2^k}\left\{(k+1)p_{000} + (k-1)\sum_{i=1}^{k} p_i + (k-3)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k} p_{ij} + (k-5)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\sum_{h=j+1}^{k} p_{ijh} + \ldots + [k-(2k-1)\,p_{ijh\ldots k}\right\}$$

(Ec. 93)

En esta expresión la notación p_i corresponde a la proporción en el estado Y=1 en todas aquellas combinaciones en que sólo un atributo independiente ***i=X, W, ..., Z*** es positivo; p_{ij} representa todas las combinaciones en que **dos** factores independientes son positivos; p_{ijh} corresponde a combinaciones con tres factores positivos, etc. Esta formidable expresión no es demasiado complicada en los casos más frecuentes donde no suele haber más de tres o cuatro factores independientes como máximo. Para un solo factor independiente es $e_{01}=p_0$. Para el caso de dos factores la expresión se reduce a:

$$e_{01} = \frac{3p_{00} + p_{10} + p_{01} - p_{11}}{4} \qquad \text{(Ec. 94)}$$

Si hay tres factores independientes dicotómicos la expresión es la siguiente, que simplificando (multiplicando y dividiendo por 2) se reduce a la ecuación 81:

$$e_{01} = \frac{4p_{000} + 2p_{100} + 2p_{010} + 2p_{001} - 2p_{111}}{8} \qquad \text{(Ec. 95)}$$

Con cuatro factores independientes, y por aplicación de la misma fórmula (83) el coeficiente estandarizado de efectos aleatorios e_{01} es:

$$e_{01} = \frac{1}{16}\{5p_{0000} + 3p_{1000} + 3p_{0100} + 3p_{0010} + 3p_{0001} + p_{1100} + p_{1010} + p_{1001} + p_{0110} + p_{0101} + p_{0011} + p_{1110} + p_{1101} + p_{1011} + p_{0111} - 3p_{1111}\} \qquad \text{(Ec. 96)}$$

Mediante este enfoque, por lo tanto, se puede cuantificar el efecto de cualquier cantidad de factores independientes de tipo dicotómico sobre una variable dependiente que también es dicotómica. En este desarrollo se ha supuesto que los efectos ocurren sólo en uno de los valores de los factores (típicamente cuando el atributo está presente y la variable vale 1), pero las fórmulas se podrían adaptar con facilidad al caso en que hay efectos dobles. De hecho, los modelos donde ***X***, como el sexo, tiene efectos tanto cuando es ***X***=0 como cuando es ***X***=1, se formalizan subdividiendo el atributo en dos, por ejemplo "Ser varón" y "Ser mujer", cada uno de ellos con un efecto específico en direcciones contrarias. De este modo el modelo de efectos dobles equivale a introducir dos atributos en lugar de uno. En la sección siguiente, y siempre bajo el supuesto de datos de corte transversal, se analiza el caso de las variables cualitativas con más de dos categorías.

6.3.3. Variables politómicas

Debe tenerse que en cuenta que una variable politómica con ***m*** categorías puede ser reemplazada por ***m***-1 variables dicotómicas tipo "dummy" (codificadas con 1 y 0). Por ejemplo la variable "Estado civil" con las categorías 1. Soltero, 2.Casado, 3.Divorciado y 4.Viudo podría ser sustituida por tres variables dicotómicas que podrían ser "Casado", "Divorciado" y "Viudo", de modo que cada estado civil tendría la siguiente configuración de valores:

Recodificación de una politomía por medio de variables dicotómicas			
	Variables dicotómicas "dummy"		
Estado civil	**Casado**	**Divorciado**	**Viudo**

1. Soltero	0	0	0
2. Casado	1	0	0
3. Divorciado	0	1	0
4. Viudo	0	0	1

En esta codificación se ha tomado el estado civil "Soltero" como referencia, creando variables dummy para todos los demás estados civiles; naturalmente podría haberse elegido cualquiera de ellos como referencia. Si se usa este tipo de recodificación, las indicaciones que aquí se dan para múltiples factores dicotómicos también pueden usarse para factores cualitativos con más de dos categorías.

6.3.4. Interacción entre factores

Hasta ahora se ha supuesto que los efectos de los diferentes factores son **aditivos** e independientes entre sí. Sin embargo, es frecuente que el efecto de un factor varíe según el valor que asuma otro factor, en cuyo caso se registra una **interacción** entre esos factores. El segundo factor puede **reforzar** o **atenuar** el efecto del primero, y viceversa. Los factores pueden **potenciarse** mutuamente o bien pueden tender a **cancelar** mutuamente sus efectos.

Usualmente, la presencia de interacción se representa mediante el producto de los factores interactuantes. Esto significa que además de los términos individuales de cada factor, como por ejemplo $â_X X$ y $â_Z Z$ puede haber un término como $â_{XZ}XZ$, el cual operaría sólo si los dos factores X y Z tienen el valor 1. Esta situación tiene una solución muy fácil, pues equivale a la presencia de una tercera variable, digamos V=XZ, que valdría 1 si tanto X como Z valen 1, y valdría 0 en los demás casos. Si se desea introducir un efecto de interacción, por lo tanto, sólo es necesario crear una variable multiplicativa como V=XZ, e incluirla en el modelo como un factor aditivo adicional. Cuando hay más de dos factores independientes puede haber también interacciones entre tres o más variables.

Si ese coeficiente $â_{XZ}$ resulta positivo, significaría que tanto el efecto de X como el de Z sufren un incremento en caso que ambos factores valgan 1. Si el efecto individual de X o Z es del mismo signo que el efecto de la interacción, entonces la interacción **intensifica** o refuerza el efecto de la variable considerada aisladamente. Si el efecto univariado y el efecto de interacción son de diferente signo, entonces la interacción tiende a contrarrestar o **atenuar** el efecto individual de la variable involucrada. Es posible que los efectos de intensificación o atenuación ocurran no sólo por la combinación de un valor 1 en X y un valor 1 en Z, sino por cualquier otra combinación de valores de esas variables. Pero en ese caso, esos factores no estarían actuando de acuerdo al concepto de presencia o ausencia de un atributo, sino a través de efectos "dobles" en que cada categoría tiene efectos especiales, de modo que habría que desdoblarlo como se explicó antes. Por ello se puede pensar que todas las interacciones son del tipo multiplicativo, y que valen 1 sólo si todas las variables interactuantes valen también 1.

En conclusión, se dispone de una adaptación multivariada del lenguaje de tasas instantáneas de transición que permite el análisis de relaciones causales entre una variable dicotómica dependiente y varios factores causales dicotómicos o politómicos (estos últimos pueden tener categorías ordenadas o constituir una escala simplemente nominal sin orden intrínseco). Este enfoque permite identificar la importancia relativa de los efectos de los factores y de los efectos aleatorios, aunque no su valor absoluto, porque en los estudios de corte transversal no hay observaciones directas sobre los cambios de estado que ocurren entre las unidades de análisis, como sí las hay en el caso de los estudios longitudinales. En la sección siguiente se extiende este análisis al caso de los estudios de panel.

6.4. Procesos causales continuos con datos de panel

La extensión a los estudios de panel de los métodos anteriormente expuestos para cortes transversales no ofrece muchas dificultades. Dado que se trata de procesos modelizados como continuos, la brecha temporal entre las rondas del panel no significa que se suponga necesariamente una demora (*lag*) entre la causa y el efecto. La disponibilidad de datos de panel tiene como principal beneficio la **medición directa de los flujos entre estados**, tanto en situaciones de equilibrio como de desequilibrio, sin necesidad de suponer que la observación efectuada en una cierta fecha corresponda a una situación de equilibrio.

6.4.1. Planteo general con un solo factor causal

Suponiendo una variable dicotómica dependiente Y, y un factor independiente X también dicotómico, existen varias posibilidades en cuanto al modelo causal que podría vincularlas. La primera distinción importante concierne al carácter constante o variable (en el tiempo) del atributo X. Un atributo como el sexo es fijo a lo largo del tiempo, mientras uno como el conocimiento de las propuestas de un candidato puede variar entre una y otra ronda del panel. En algunos casos el cambio ocurre sólo a unas pocas unidades de análisis a lo largo del intervalo entre las rondas, de modo que para la mayor parte de los sujetos el factor puede considerarse constante, y el grupo que cambia podría ser estadísticamente poco significativo, como ocurre por ejemplo con la variable "estado civil", ya que los que efectúan por semestre cada cambio de estado civil (de casado a divorciado, de soltero a casado, etc.) son un porcentaje muy bajo del total. En esos casos a menudo el factor se considera como constante, y se descartan aquellos sujetos que hayan cambiado de categoría durante el intervalo, salvo cuando los contingentes que sufrieron cambios sean de un tamaño estadísticamente suficiente para que las estimaciones no tengan demasiado margen de error.

En muchos casos en que el cambio de X es un evento relativamente poco frecuente, difícilmente un sujeto sufra más de una transición en un intervalo entre dos rondas que sea razonablemente breve (por ejemplo encuestas trimestrales, semestrales o anuales). En cambio hay otros posibles factores causales cuyos cambios podrían ocurrir varias veces durante el intervalo, como por ejemplo el tener o no tener una elevada presión arterial.

La constancia o variabilidad del factor independiente hace que el modelo causal incluya o no el **cambio en la variable independiente** como causa del cambio en la variable dependiente. La variable dependiente en este caso sería por ejemplo la tasa de transición de la variable Y desde el estado 0 hacia el estado 1. El factor causal que modifica esa tasa, en el caso de una constante como el sexo, sería precisamente el valor de la variable independiente, por ejemplo el sexo del sujeto, en el sentido de que los varones pasarían de 0 a 1 con mayor o menor intensidad que las mujeres. En el caso de un factor causal variable, puede haber dos clases de efectos sobre Y: el nivel inicial de X donde estaba ubicado el sujeto, y el cambio sufrido (o no sufrido) por X durante el intervalo entre las dos rondas. En el primer caso el modelo es: X→ÄY mientras en el segundo el modelo es (X,ÄX)→ÄY. Supongamos que Y=Intención de votar por A, y X=Percepción del sujeto sobre su propia situación económica, donde X tiene los valores 0=Buena y 1=Mala. Los cambios en la intención de votar por el candidato A, es decir ÄY, dependerán del **nivel** de la percepción inicial y de los **cambios** sufridos por la percepción de su situación que hayan experimentado los sujetos en los últimos tiempos (algunos sujetos habrán mantenido la misma percepción de su situación como "Buena" o "Mala", otros pasaron de "Mala" a "Buena" y otros a la inversa). En el primer caso habrá que observar las diferencias en las tasas de transición entre las subpoblaciones de sujetos situadas en dos estados fijos (por ejemplo varones comparados con mujeres, o personas con información comparadas con personas sin información acerca de las propuestas del candidato); en el segundo caso, en que X puede variar a lo largo del tiempo, se observan las diferencias en las tasas de transición entre las subpoblaciones que corresponden a cuatro flujos entre estado en ***t*** y estado en ***t+h***: Buena-Buena, Mala-Mala, Mala-Buena y Buena-Mala.

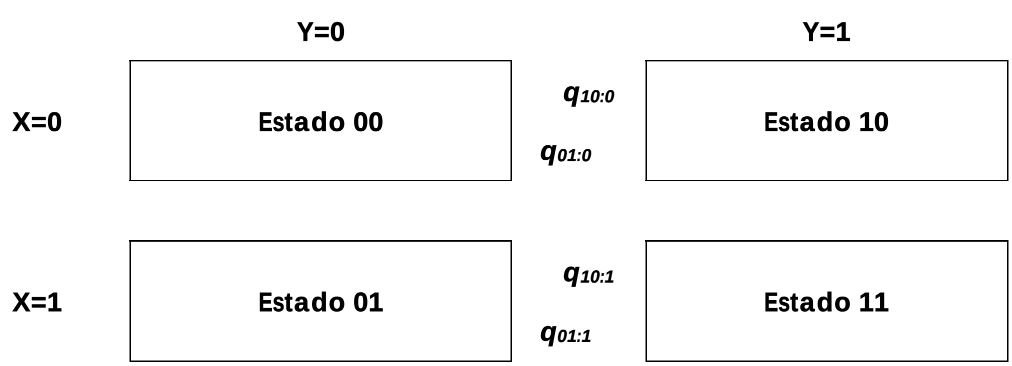
Otra distinción importante que debe hacerse aquí, en cuanto a las características del proceso causal involucrado, es entre procesos causales **unidireccionales** y procesos **recíprocos**. En los primeros, X influye sobre Y pero Y no influye sobre X. En el segundo caso, los dos atributos se influyen mutuamente.

Opciones metodológicas para el análisis causal de variables dicotómicas	
Opciones metodológicas	**Significado**

Número de factores causales	Uno	Un solo factor causal
	Varios	Varios factores causales
Dirección causal	Unidireccional	X opera sobre Y, pero Y no influye sobre X
	Recíproca	X influye sobre Y, e Y influye sobre X
Tipo de efectos	Por presencia	X=1 tiene efecto; X=0 no tiene efecto
	Por categoría	Ambas categorías tienen efectos específicos
Variabilidad de los factores en el tiempo	Factores constantes	Y responde al **valor** de X
	Factores variables	Y responde al **valor** y a los **cambios de valor** de X

6.4.2. Un factor constante con efecto simple unidireccional

Comenzaremos con un proceso causal **unidireccional**, con **un solo factor**, con efectos simples (por **presencia**), donde X es **constante** en el tiempo. Los sujetos pueden cambiar de estado en la variable Y, pero no cambian su valor de X. Esos flujos entre ambos estados de la variable Y se supone que están gobernados por tasas de transición $q_{ij:x}$, es decir, tasas de transición específicas según el valor que el individuo tenga en la variable X. Del mismo modo se denota como "estado 00" al estado Y=0 bajo la condición de que los sujetos pertenezcan al grupo X=0, y de igual modo otros estados. Dado que X no varía, sólo hay transiciones entre los dos estados de Y:



El análisis de las relaciones causales entre X e Y implica, por una parte, calcular las tasas de transición, y en segundo lugar, **particionar** las tasas de transición entre estados de Y distinguiendo los factores aleatorios del influjo específico del factor X. En este modelo simple, si el factor X es un atributo cuya presencia incrementa o reduce la tasa de transición desde Y=0 hacia Y=1, sería q_{01}=å$_{01}$ y q_{23}=â$_{X}$+ å$_{01}$. El efecto de la presencia de X, es decir el coeficiente â$_{X}$, puede ser positivo o negativo, según tenga como resultado acelerar o retardar los cambios de estado desde Y=0 hacia Y=1. Un razonamiento similar puede aplicarse a los flujos en sentido contrario, que para mayor claridad se indican con la letra griega **á**. Sería q_{10}= å$_{10}$ y por otro lado q_{32}= á$_{X}$ + å$_{10}$. Por lo tanto en este caso simple, con un solo factor independiente de tipo dicotómico, los coeficientes se encuentran fácilmente. Los efectos corresponden a la **diferencia en las tasas de transición** en presencia o ausencia del factor:

â$_{X}$ = q_{23} - q_{01} (Ec. 97)

á$_{X}$ = q_{32} - q_{10} (Ec. 98)

En otras palabras, el efecto de la presencia de X se traduce en la diferencia de las tasas instantáneas de transición de Y cuando X está presente y cuando X está ausente. El efecto â$_{X}$ de la presencia del atributo X sobre los flujos en una dirección (de Y=0 a Y=1) puede ser diferente del efecto á$_{X}$ que gobierna los flujos opuestos (de Y=1 a Y=0).

6.4.3. Varios factores constantes con efecto simple unidireccional

En el caso de un modelo causal multivariado donde hay varios factores causales involucrados, los efectos de un atributo sobre la variable dependiente son estimadas por el **promedio de las diferencias en las tasas de transición** que difieren sólo en la presencia o ausencia de ese factor. Por ejemplo, supóngase que los dos factores causales son el sexo y el nivel socioeconómico, ambos considerados constantes en el tiempo, y la variable dependiente es la opinión política, que puede variar entre Y=1 (votar por el partido A) e Y=0 (no votar por el partido A). Los sujetos pasan del estado Y=1 al estado Y=0, o viceversa, según las tasas instantáneas de transición q_{10} y q_{01}. Estas tasas varían según el valor que tengan los factores independientes. Sea $q_{01:10}$ la tasa de transición de Y=0 a Y=1 cuando el sexo es X=1 y el nivel socioeconómico es Z=0. La correspondiente tasa para el sexo opuesto sería $q_{01:00}$. Estas dos tasas se refieren al mismo nivel socioeconómico (Z=0) y difieren en el sexo. Asimismo se definen $q_{01:11}$ y $q_{01:01}$ para el caso que el nivel socioeconómico sea Z=1. Las ecuaciones que particionan las tasas de acuerdo a los factores que inciden en ellas son las siguientes:

$q_{01:00}$ = å$_{01}$ (Ec. 99.1)

$q_{01:10}$ = â$_{x}$ + å$_{01}$ (Ec. 99.2)

$q_{01:01}$ = â$_{z}$ + å$_{01}$ (Ec. 99.3)

$q_{01:11}$ = â$_{x}$ + â$_{z}$ + å$_{01}$ (Ec. 99.4)

$q_{10:00}$ = å$_{10}$ (Ec. 99.5)

$$q_{01:00} = å_{01} \qquad \text{(Ec. 99.1)}$$

$$q_{10:10} = á_x + å_{10} \qquad \text{(Ec. 99.6)}$$

$$q_{10:01} = á_z + å_{10} \qquad \text{(Ec. 99.7)}$$

$$q_{10:11} = á_x + á_z + å_{10} \qquad \text{(Ec. 99.8)}$$

El impacto de un factor independiente, por ejemplo el sexo, se mide por la diferencia entre las tasas de transición para varones y para mujeres, promediando la diferencia que se obtiene entre los sujetos de nivel socioeconómico alto la que presentan los sujetos de nivel socioeconómico bajo. La tasa $q_{01:10}$ es la tasa de transición de Y=0 a Y=1 cuando el sexo es X=1 y el nivel socioeconómico es Z=0. La correspondiente tasa para el sexo opuesto sería $q_{01:00}$. Estas dos tasas se refieren al mismo nivel socioeconómico (Z=0) y difieren en el sexo. Por lo tanto su diferencia ($q_{01:10}$ - $q_{01:00}$) indica el efecto del sexo entre aquellas personas con ese nivel socioeconómico Z=0. Del mismo modo se puede calcular esa diferencia por sexo para el otro nivel socioeconómico, ($q_{01:11}$ - $q_{01:01}$). Dado que el modelo es aditivo y sin interacción entre los factores causales, el influjo del sexo tendría que ser el mismo (salvo perturbaciones aleatorias) en los dos casos. Por lo tanto, en este caso con dos factores se estima el valor del efecto del sexo como **promedio** de esas dos diferencias:

$$\hat{a}_X = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}(q_{01:1k} - q_{01:0k}) = \frac{(q_{01:10} - q_{01:00}) + (q_{01:11} - q_{01:01})}{2} \qquad \text{(Ec. 100)}$$

En este caso con sólo dos factores dicotómicos hay que promediar sólo dos diferencias: la que se obtiene con Z=0 y la que existe cuando Z=1. En el caso general en que hay w factores independientes, la fórmula es similar, aunque la cantidad de diferencias que se deben promediar es mayor. Los w factores independientes dicotómicos dividen la población en 2^w subpoblaciones. En cada una de ellas rige una tasa de transición de Y=0 a Y=1. Tómese ahora uno de los factores independientes, X_h. Llámese $q_{01:hz}$ a la tasa de transición de Y=0 a Y=1 en la subpoblación caracterizada por el valor X_h=1 y por una determinada combinación Z de valores de los otros factores. Del mismo modo, llámese $q_{01:h'z}$ a la tasa correspondiente cuando X_h=0. En cada una de las dos subpoblaciones determinadas por X_h=0 y X_h=1 hay a su vez 2^{w-1} subpoblaciones correspondientes a diferentes combinaciones Z de valores de los otros w-1 factores independientes. En cada una de estas 2^{w-1} subpoblaciones se puede medir la diferencia entre la tasa de transición $q_{01:hz}$ cuando la variable X_h=1 y la misma tasa ($q_{01:h'z}$) cuando la variable X_h=0. Hay por lo tanto que promediar 2_{w-1} diferencias para obtener una estimación del efecto de X_h. La diferencia $q_{01:hz}$ - $q_{01:h'z}$ indica el efecto del atributo X_h sobre la tasa de transición de Y=0 a Y=1 **cuando los demás factores tienen la combinación de valores** Z, que puede variar desde Z=000...0 hasta Z=111....1. El efecto promedio del atributo X_h, por lo tanto se obtiene promediando las 2^{w-1} diferencias obtenidas para las 2^{w-1} combinaciones ***Z*** de los otros ***w-1*** factores:

$$\hat{a}_h = \frac{1}{2^{w-1}} \sum_z (q_{01:hz} - q_{01:h'z}) \qquad \text{(Ec. 101)}$$

Del mismo modo se obtiene el efecto de otros factores X_k, X_g, ... X_w. De este modo se obtiene un conjunto de ***w*** coeficientes $\hat{a}_h$ (donde ***h***=1, 2, ... ***w***) que miden el impacto de cada uno de los ***w*** factores sobre la tasa de transición q_{01}.

El efecto aleatorio $\mathring{a}_{01}$ de otros factores no identificados que influyen para que los sujetos pasen del estado Y=0 al estado Y=1 se estima como promedio de los varios residuos obtenidos al restar de cada tasa de transición la suma de efectos de los factores. Denominaremos $q_{01:z}$ a la tasa de transición desde Y=0 a Y=1 en la subpoblación *Z* caracterizada por los valores (0,1) de ***w*** factores, y llamaremos B_Z a la suma de los coeficientes $\hat{a}_h$ de todos los factores con valor 1 en la subpoblación *Z*. Existen 2^w subpoblaciones Z. Entonces la estimación del efecto aleatorio sobre $q_{01:z}$ es:

$$\mathring{a}_{01} = \frac{1}{2^w} \sum_Z (q_{01:Z} - B_Z) \qquad \text{(Ec. 102)}$$

Del mismo modo se estiman los coeficientes $\acute{a}_h$ que miden el impacto de los ***w*** factores sobre la tasa de transición desde Y=1 hacia Y=0, es decir q_{10}, y el coeficiente de influencias aleatorias en la misma dirección, $\mathring{a}_{10}$. Como resultado se obtienen todos los coeficientes necesarios para estimar el efecto de los **w** factores (todos ellos constantes en el tiempo) en el proceso estocástico que mueve a los sujetos entre los estados 0 y 1 de la variable Y, y que en el caso de dos factores causales están reflejados en las ecuaciones 99.1 a 99.7.

Este enfoque requiere como primer paso el cálculo de todas las tasas de transición: las tasas globales q_{01} y q_{10}, y las tasas "parciales" $q_{01:hz}$, $q_{01:h'z}$, $q_{10:hz}$, y $q_{10:h'z}$ para cada valor 0 y 1 de cada uno de los ***w*** factores, y para cada una de las 2^{w-1} combinaciones ***Z*** de los otros ***w-1*** factores. Una vez que se dispone de todas estas tasas de transición se puede estimar el efecto de cada factor sobre las mismas. Si los factores independientes son muchos esto puede ser muy laborioso, aun para un número razonable de factores. Con tres factores independientes hay que calcular en total $2 \times 2^3 = 16$ tasas de transición parciales. Con cuatro factores la cifra asciende a $2 \times 2^4 = 32$ tasas. La fórmula general de las tasas de transición es la de la ecuación 31:

$$q_{ij} = \left(\frac{r_{ij}^h}{r_{ij}^h + r_{ji}^h} \right) \left(\frac{-\ln(1 - r_{ii}^h - r_{ji}^h)}{h} \right) \qquad \text{(Ec. 103)}$$

donde ***h*** es la longitud del intervalo entre rondas, y r_{ij} son las probabilidades de transición entre estados $r_{ij} = N_{ij} / N_i^t$ (flujo de ***i*** a ***j*** en el intervalo ***h*** sobre población inicial en el estado ***i***). En el caso de las tasas de transición globales se aplica esta fórmula sobre el total de casos en el panel. Para las tasas de transición "parciales" se efectúa el mismo cálculo sobre cada una de las subpoblaciones correspondientes. La necesidad de trabajar con una gran cantidad de subpoblaciones, algunas de las cuales serán probablemente muy pequeñas, hace que este enfoque requiera una muestra de considerable tamaño para poder medir el efecto de cada uno de los factores controlando todos los demás. Este problema puede ser importante. Por ejemplo, supóngase que el panel abarca 4000 sujetos, y que se estudian simultáneamente cuatro factores dicotómicos, de modo que hay que calcular tasas de transición parciales en 2^3=8 subpoblaciones. El tamaño promedio de esas subpoblaciones será 4000/8=500 sujetos, pero muchas pueden tener un número mucho menor de casos. Para cada tasa de transición se debe considerar una tabla 2x2 donde cada uno de los cuatro flujos (00, 01, 10 y 11) tendrá en promedio 500/4=125 casos, pero en muchas oportunidades la tabla misma puede tener menos de 500 casos, y algunos de los flujos pueden tener menos de la cuarta parte de los casos. Es sumamente fácil que alguno de esos flujos sea muy pequeño, tal vez menos de 10 o menos de 5 casos. Para que la estimación sea más o menos confiable debería haber al menos unos 20-30 casos involucrados en cada flujo. Es cierto que la estimación final es un promedio de varias diferencias, de modo que los errores de muestreo de algunas de ellas tenderán a compensarse con los errores de sentido opuesto en otras, pero de todos modos los márgenes de error de tales estimaciones corren serio peligro de ser altos.

6.4.4. Varios factores constantes con efecto doble unidireccional

La siguiente "complejización" de este enfoque consistirá en permitir que los factores tengan efectos "dobles". Hasta ahora, el valor X=0 no tenía ningún efecto, y el valor X=1 tenía un efecto $\hat{a}_x$ sobre la tasa q_{01} y un efecto $\acute{a}_x$ sobre la tasa q_{10}. Ahora supondremos que X=0 también tiene un efecto. Llamaremos $\hat{a}_{x1}$ al efecto de X=1 sobre la tasa q_{01} y $\hat{a}_{x0}$ al efecto de X=0. Del mismo modo llamaremos $\acute{a}_{x1}$ al efecto de X=1 sobre la tasa q_{10}, y $\acute{a}_{x0}$ al efecto de X=0.

Adviértase que aquí no sólo se supone que ambos valores de X tienen efectos sobre Y, sino también que cada valor de X tiene un efecto sobre q_{01} y otro efecto sobre q_{10}, de modo que hay cuatro efectos para identificar y estimar. Las ecuaciones serían del siguiente tipo (en el ejemplo hay sólo dos factores independientes X y Z):

$$q_{01:00} = \hat{a}_{X0} + \hat{a}_{Z0} + \mathring{a}_{01} \qquad \text{(Ec. 104)}$$

$$q_{01:01} = \hat{a}_{X0} + \hat{a}_{Z1} + \mathring{a}_{01} \qquad \text{(Ec. 105)}$$

$$q_{01:10} = \hat{a}_{X1} + \hat{a}_{Z0} + \mathring{a}_{01} \qquad \text{(Ec. 106)}$$

$$q_{01:11} = \hat{a}_{X1} + \hat{a}_{Z1} + \mathring{a}_{01} \qquad \text{(Ec. 107)}$$

En este caso es evidente que no se puede estimar cada coeficiente por el conveniente método de medir la diferencia de las tasas de transición que incluyan o no incluyan cada factor. Por ejemplo, en el caso de X, la diferencia de las ecuaciones 106 y 104 sería:

$$q_{01:10} - q_{01:00} = \hat{a}_{X1} - \hat{a}_{X0} \qquad \text{(Ec. 108)}$$

Se puede así estimar la diferencia entre estos coeficientes, pero no cada uno por separado. Lo mismo ocurriría en otras diferencias similares, como por ejemplo si a la ecuación 97 se le resta la ecuación 96, donde la diferencia de tasas de transición sería igual a $\boldsymbol{\hat{a}_{z1} - \hat{a}_{z0}}$. En todos los casos resulta imposible calcular separadamente el efecto del valor 1 y el efecto del valor 0, sino sólo la diferencia entre ambos, que equivale al **efecto neto** del factor. Ese efecto neto, por supuesto, puede ser positivo o negativo según predomine el efecto del valor 1 o el efecto del valor 0. Debe interpretarse por ejemplo como la variación neta que sufriría la tasa $\boldsymbol{q_{01:00}}$ si el factor *Z* pasase de 0 a 1. Dado que sólo se puede calcular el efecto neto de cada factor ***h***, que podemos denominar simplemente $\boldsymbol{\hat{a}_h}$, el modelo con efectos dobles se reduce a un modelo de efectos netos que es indistinguible del modelo de efectos simples anteriormente analizado. Por lo tanto en lo sucesivo nos referiremos únicamente a efectos simples, en el entendido que los resultados pueden también ser interpretados como referidos al saldo neto de efectos dobles.

6.4.5. Factores variables

Hasta ahora hemos supuesto que los factores causales no varían durante el intervalo entre las rondas del panel. En esta sección se estudian las modificaciones que debe sufrir el modelo cuando esos factores pueden variar al mismo tiempo que varía la variable dependiente. Puede ser que la variable dependiente no influya sobre los factores (efectos unidireccionales) o que pueda a su vez influir sobre ellos (efectos recíprocos).

En un modelo multivariado con efectos recíprocos, distintas variables se influyen mutuamente. Puede haber algunas que no son determinadas por otras variables del modelo, y por lo tanto operan como variables **exógenas**, mientras otras obedecen a factores internos al modelo y son por lo tanto **endógenas**. En estos modelos, la distinción entre variables dependientes e independientes es de hecho reemplazada por la distinción entre variables endógenas y exógenas. Una variable es exógena cuando ninguna otra variable influye sobre ella, sino sólo factores aleatorios externos al modelo. Si una variable endógena sufre cambios a lo largo del tiempo, esos cambios son atribuidos por el modelo exclusivamente a factores aleatorios externos, mientras que las variaciones en una variable endógena se explican no sólo por factores aleatorios sino también por la influencia de otras variables.

Para tratar esta situación supondremos un caso sencillo con dos variables endógenas (Y, Z) y una tercera variable que puede ser endógena o exógena (X), todas ellas dicotómicas codificadas con 0 y 1. En un momento dado cada unidad o individuo está caracterizado por un vector [XYZ] que varía entre [000] y [111], con un total de ocho estados posibles. El primer paso consiste en partir de la tabla de rotación para dos momentos en el tiempo, ***t*** y ***t+1***, a fin de calcular las tasas instantáneas de rotación entre esos ocho estados. La notación que se usará será la siguiente:

$\boldsymbol{q}_{XYZ:xyz}$: Tasa instantánea de transición desde el estado [XYZ] hasta el estado [xyz]. Por ejemplo:

$q_{000:001}$=Tasa instantánea de transición desde el estado [000] al estado [001], lo que involucra que X e Y permanezcan en el valor 0 mientras Z pasa de 0 a 1.

En total hay 8 x 8 = 64 tasas instantáneas de transición en este modelo. Cada una de las que involucran algún cambio de estado puede ser hallada mediante la serie exponencial de la ecuación 35 bis. Las tasas de la diagonal principal (que implican permanencia en el mismo estado, como por ejemplo $\boldsymbol{q}_{000:000}$) equivalen a la suma de las otras tasas de la misma fila, cambiada de signo. Hay por lo tanto 8 x 7 = 56 tasas de transición linealmente independientes.

Una vez calculadas las tasas instantáneas de transición se procede a particionarlas en sus componentes. Si se supone que los cambios en X son exclusivamente exógenos, ellos obedecerán únicamente a efectos aleatorios, mientras los cambios en Y, Z son en parte exógenos y en parte debidos a la influencia de las mismas variables X, Y y Z. Los efectos que deben ser estimados si X es exógena son los siguientes:

$\acute{a}_{XY}$ = Efecto de X=1 en el desplazamiento de Y=1 a Y=0

$\acute{a}_{XZ}$ = Efecto de X=1 en el desplazamiento de Z=1 a Z=0

$\acute{a}_{YY}$ = Efecto de Y=1 en el desplazamiento de Y=1 a Y=0

$\acute{a}_{YZ}$ = Efecto de Y=1 en el desplazamiento de Z=1 a Z=0

$\acute{a}_{ZY}$ = Efecto de Z=1 en el desplazamiento de Y=1 a Y=0

$\acute{a}_{ZZ}$ = Efecto de Z=1 en el desplazamiento de Z=1 a Z=0

$\hat{a}_{XY}$ = Efecto de X=1 en el desplazamiento de Y=0 a Y=1

$\hat{a}_{XZ}$ = Efecto de X=1 en el desplazamiento de Z=0 a Z=1

$\hat{a}_{YY}$ = Efecto de Y=1 en el desplazamiento de Y=0 a Y=1

$\hat{a}_{YZ}$ = Efecto de Y=1 en el desplazamiento de Z=0 a Z=1

$\hat{a}_{ZY}$ = Efecto de Z=1 en el desplazamiento de Y=0 a Y=1

$\hat{a}_{ZZ}$ = Efecto de Z=1 en el desplazamiento de Z=0 a Z=1

Si X es endógena hay que añadir parámetros que reflejen el efecto de Y y Z sobre X (otros seis parámetros). Además de estos efectos de las variables entre sí, hay qque estimar los siguientes efectos aleatorios:

$\mathring{a}_{X10}$ = Efectos aleatorios en el desplazamiento de X=1 a X=0

$\mathring{a}_{X01}$ = Efectos aleatorios en el desplazamiento de X=0 a X=1

$\mathring{a}_{Y10}$ = Efectos aleatorios en el desplazamiento de Y=1 a Y=0

$\mathring{a}_{Y01}$ = Efectos aleatorios en el desplazamiento de Y=0 a X=1

$\mathring{a}_{Z10}$ = Efectos aleatorios en el desplazamiento de Z=1 a X=0

$\mathring{a}_{Z01}$ = Efectos aleatorios en el desplazamiento de Z=0 a X=1

Todos estos efectos á, â y å pueden ser negativos, nulos o positivos. En total, como se ve, si X es exógena hay 18 parámetros a estimar con un total de 56 ecuaciones linealmente independientes. Si X fuese también endógena habría 24 parámetros a estimar con 56 ecuaciones, y por lo tanto la situación no variaría fundamentalmente. El mismo parámetro figurará en varias ecuaciones, de modo que en principio habrá varias estimaciones posibles de cada parámetro, y por lo tanto hay que usar un método de mínimos cuadrados, minimizando los errores derivados de usar una u otra estimación. En líneas generales esto significa que los efectos á y â se estiman como un promedio de las diferencias entre las ***q*** con presencia y con ausencia de determinados factores. Los efectos aleatorios se estiman luego en función de esos resultados, como ya se mostró anteriormente en el caso del análisis multivariado de corte transversal. Sería excesivo detallar la partición de todas las tasas de transición, pero como ejemplo se incluyen las siguientes:

$$q_{000:001} = \mathring{a}_{Z01} \qquad \text{(Ec. 109)}$$

$$q_{100:101} = \mathring{a}_{Z01} + \hat{a}_{XZ} \qquad \text{(Ec. 110)}$$

$$q_{110:111} = \mathring{a}_{Z01} + \hat{a}_{XZ} + + \hat{a}_{YZ} \qquad \text{(Ec. 111)}$$

$$q_{110:101} = \mathring{a}_{Y10} + \mathring{a}_{Z01} + \acute{a}_{XY} + \acute{a}_{YY} + \hat{a}_{XZ} + \hat{a}_{YZ} \qquad \text{(Ec. 112)}$$

La ecuación 109 parte del estado [000] con todas las variables en cero. Dado que se postulan efectos simples, del tipo "ausencia-presencia", donde cada atributo ejerce influjo causal cuando está presente, y no lo ejerce en ausencia, entonces la tasa de transición $q_{000:001}$, que implica un desplazamiento de la variable Z de 0 a 1, está determinada únicamente por factores aleatorios no identificados. En cambio en la ecuación 110 la tasa $q_{100:101}$ implica el mismo cambio en Z, de 0 a 1, pero en presencia del atributo X, y por lo tanto obedece a los mismos factores aleatorios más la influencia $\hat{a}_{XZ}$ de X=1. En el caso de la ecuación 111, se parte del estado [110] para pasar al estado [111], y entonces el cambio en Z de 0 a 1 está condicionado por el influjo de X y de Y a través de los coeficientes $\hat{a}_{XZ}$ y $\hat{a}_{YZ}$. Por último, en el caso de la ecuación 112, se producen dos cambios: Z pasa de 0 a 1 mientras Y pasa de 1 a 0, al pasar los sujetos involucrados desde [110] a [101]. En este caso hay cuatro influencias de las variables: los efectos $\hat{a}_{XZ}$ y $\hat{a}_{YZ}$ que desplazan Z de 0 a 1, y los efectos $\acute{a}_{XY}$ y $\acute{a}_{YY}$ que contribuyen a desplazar Y desde 1 hacia 0, junto con los dos efectos aleatorios $\mathring{a}_{Y10}$ y $\mathring{a}_{Z01}$. En forma similar se especifican las ecuaciones correspondientes a la partición de todas las demás tasas de transición según los efectos que operen sobre ellas.

La fórmula para calcular los distintos parámetros á y â es simplemente el promedio de todas las diferencias de las ***q*** caracterizadas por la presencia y ausencia del respectivo factor. Por ejemplo:

$$\acute{a}_{XY} = \frac{\sum_m \sum_i \sum_n (q_{11m:i0n} - q_{01m:i0n})}{8} \quad \text{(Ec. 113)}$$

donde los subíndice ***i, m*** y ***n*** pueden valer 0 o 1. Las ocho diferencias que se incluyen son:

($q_{111:101}$ – $q_{011:101}$); ($q_{111:100}$ – $q_{011:100}$), ($q_{110:101}$ – $q_{010:101}$); ($q_{110:100}$ – $q_{010:100}$); ($q_{111:001}$-$q_{011:001}$); ($q_{111:000}$-$q_{011:000}$); ($q_{110:001}$ – $q_{010:001}$); y ($q_{110:000}$ – $q_{010:000}$). Dentro de cada paréntesis, el primer término contiene X=1, y el segundo X=0, y esa es la única diferencia entre ambos términos. Fórmulas similares se utilizan para el resto de los parámetros á y â.

En cuanto a los efectos aleatorios, una vez estimados los parámetros á y â se procede de modo similar, promediando todas las diferencias entre tasas en que un efecto aleatorio esté presente y ausente.

Para que estas estimaciones tengan significación estadística es conveniente que cada uno de los flujos involucrados entre un estado [***ijk***] y otro estado [***lmn***] esté representado por un número adecuado de casos en la muestra. No existe una regla clara al respecto, pero sería razonable requerir que todos los flujos tengan al menos 20-30 casos, para que las diferencias del tipo expresado en la ecuación 113 no estén afectadas por mucho error de muestreo. Sin embargo Coleman (1964b, pp.201-213) demuestra que el factor más importante es el tamaño **total** de la muestra, y que la existencia de un fuerte desbalance entre el tamaño de dos de los flujos que se comparan no tendría en general un impacto significativo.

7. Variables latentes en estudios de panel

En el análisis de la incertidumbre de respuesta se hizo la distinción entre el estado subyacente de los sujetos y sus respuestas manifiestas. Ese estado subyacente fue modelizado como un conjunto de "elementos" que podían estar en varios estados, y cuya distribución condicionaba probabilísticamente al sujeto para producir determinadas respuestas con mayor o menor probabilidad. Esa noción puede ser ampliada mucho más si se piensa que cualquier dato observable podría considerarse como un mero indicador de alguna "verdadera" variable que permanece latente e inobservable.

En el reino de los datos de corte transversal existen diferentes enfoques que procuran identificar y medir algunas variables latentes a partir de variables manifiestas. Cuando las variables manifiestas son de tipo cuantitativo, el modelo clásico es el **análisis factorial**. Cuando las variables manifiestas son atributos dicotómicos, el enfoque más importante es el **análisis de estructura latente**, que incluye modelos de **clases latentes,** modelos con variables latentes de tipo **ordinal**, y modelos variables latentes con **escala de intervalo**. Otros enfoques parecidos para variables cualitativas son el **escalamiento multidimensional** (*multi-dimensional scaling,* o **MDS**), y varios esquemas análogos como en análisis de correspondencias múltiples, el análisis de homogeneidad, y el análisis de componentes principales para variables categóricas. En este capítulo se revisan los principales conceptos del **análisis de estructura latente**.

8. Cohortes teóricas e historia de eventos

Nota técnica – Vectores y matrices

Vectores. Los vectores consisten en una fila o columna de números, con dimensiones ***1xn*** (en el caso de un vector fila con **n** componentes) o bien ***m* x *1*** (en el caso de un vector columna con **m** componentes).

Vector fila: $a = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$ Vector columna: ***b*** **=** $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Transposición de vectores. Los vectores pueden ser **transpuestos**, convirtiendo así un vector fila en un vector columna y viceversa. Un vector transpuesto se indica con un apóstrofo. Así ***b'*** es el vector ***b*** transpuesto. Si ***b*** era un vector columna, ***b'*** será un vector fila, y viceversa.

Los vectores pueden ser descritos como unos números dispuestos en forma de una fila y varias columnas, o una columna y varias filas. Esto significa que los vectores son un caso especial de unos objetos más generales, las matrices, que pueden tener cualquier número de filas y cualquier número de columnas.

Matrices. Las matrices son disposiciones rectangulares con ***n*** filas y ***m*** columnas, y por ello se denominan matrices de dimensión ***n x m***. Un vector o matriz con sólo una fila y sólo una columna se denomina un **escalar**, y es un simple número. Una matriz con igual número de filas que de columnas (***n x n***) se denomina **matriz cuadrada**. Un vector-fila puede ser considerado como una matriz de dimensión ***1 x m***, y un vector columna como una matriz de dimensión ***n x 1***. El siguiente es un ejemplo de una matriz ***C*** con dos filas y tres columnas. Sus elementos se indican con dos subíndices: el primero indica la fila, y el segundo la columna.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Una matriz puede **transponerse** intercambiando filas con columnas. En la transposición de una matriz como la que antecede, la primera fila de ***C*** pasa a ser la primera columna de ***C'*** y del mismo modo el resto de las filas y columnas.

$$C' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \\ c_{13} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Suma y resta de vectores y matrices. Los vectores y matrices pueden ser sumados, restados y multiplicados entre sí. La suma o resta de dos vectores o de dos matrices equivale a un vector o matriz cuyos elementos son la suma o la diferencia de los elementos correspondientes de los sumandos. Por lo tanto, los vectores o matrices que se suman o restan deben tener exactamente la misma dimensión para que esta operación sea posible. En el siguiente ejemplo se suman dos matrices de igual dimensión. Los elementos de la suma son simplemente la suma de los elementos correspondientes de los sumandos.

a_{11}	a_{12}	a_{13}		b_{11}	b_{12}	b_{13}		$a_{11}+b_{11}$	$a_{12}+b_{12}$	$a_{13}+b_{13}$	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	+	b_{21}	b_{22}	b_{23}	=	$a_{21}+b_{21}$	$a_{22}+b_{22}$	$a_{23}+b_{23}$	(Ec. A.1)
a_{31}	a_{32}	a_{33}		b_{31}	b_{32}	b_{33}		$a_{31}+b_{31}$	$a_{32}+b_{32}$	$a_{33}+b_{33}$	

Multiplicación de vectores. En el producto de dos vectores, el resultado es la suma de los productos de cada término de uno con cada término del otro. Para esto se requiere que ambos vectores sean de la misma dimensión, es decir que tengan el mismo número de elementos. El resultado será distinto según el orden en que estén dispuestos los vectores, y según se trate de vectores fila o vectores columna. En el mundo de los vectores y matrices **el orden de los factores altera el producto**. En general, para multiplicar dos vectores o matrices se multiplica **cada fila del primer factor por cada columna del segundo.** Por ello cuando se trata de vectores, que tienen una sola fila o una sola columna, se requiere que ambos tengan el mismo número de elementos. Consideremos primero el producto de un vector fila por un vector columna.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = \sum a_i b_j \qquad \text{(Ec. A.2)}$$

En este caso, obviamente, el primer vector tiene una sola fila, y el segundo una sola columna. Se procede a multiplicar la fila por la columna. La operación consiste en multiplicar cada elemento de la fila de la izquierda por el respectivo elemento de la columna de la derecha, y sumar todos esos productos. Dado que hay una sola fila en el vector de la izquierda, y una sola columna en el vector de la derecha, el resultado es una sola suma de productos, es decir un número (un escalar).

En el caso inverso las cosas son un tanto diferentes. Cuando el primer vector es un vector columna, y el segundo un vector fila, se sigue aplicando la regla de multiplicar las filas del primero por las columnas del segundo. Un vector columna tiene ***n*** filas con un solo elemento cada una, y un vector fila tiene una sola fila con **m** elementos (es decir **m** columnas). Cuando se multiplica cada fila del primero por cada columna del segundo, cada par de elementos origina un producto diferente. Al repetir la operación con todas las filas del vector de la izquierda, aplicadas a cada columna del vector de la derecha, esta operación origina una matriz.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{bmatrix} \quad \text{(Ec. A.3)}$$

Para que la primera operación (ecuación A.2) fuese posible se requería que el número de filas del primer vector (una sola) fuese igual al número de columnas del segundo. El resultado tiene como dimensión el número de filas del primero y el número de columnas del segundo, que en el caso de la ecuación A.2 es uno por uno, es decir un escalar (que puede ser considerado como una matriz con una sola fila y una sola columna). La regla general sobre este punto se puede indicar del modo siguiente:

Dimensión de los factores	**Dimensión del producto**
(1 x m)(m x 1)	1 x 1 (escalar)
(1 x m)(n x 1) siendo n m	Imposible
(m x 1)(1 x n)	m x n (matriz)
(1 x m)(1 x n)	Imposible
(m x 1)(n x 1)	Imposible

En general, el número de columnas del primero debe ser igual al número de filas del segundo, y el producto tiene como dimensiones el número de filas del primero y el número de columnas del segundo. Por esa razón **es imposible multiplicar entre sí dos vectores fila**, y también **es imposible multiplicar entre sí dos vectores columna** (salvo en el caso trivial de un vector fila o columna **de orden uno**, que sería un escalar).

Multiplicación de matrices. En el caso de la multiplicación de dos matrices se procede del mismo modo. La condición necesaria para que la operación sea posible es que el número de columnas de la matriz de la izquierda sea igual al número de filas de la matriz situada a la derecha. La matriz resultante tendrá la misma cantidad de filas que la matriz de la izquierda, y la cantidad de columnas de la matriz de la derecha. Cada celdilla de la matriz resultante puede considerarse como el producto de una fila de la primera por una columna de la segunda, como en la ecuación A.2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j}b_{j1} & \sum_j a_{1j}b_{j2} & \sum_j a_{1j}b_{j3} & \sum_j a_{1j}b_{j4} \\ \sum_j a_{2j}b_{j1} & \sum_j a_{2j}b_{j2} & \sum_j a_{2j}b_{j3} & \sum_j a_{2j}b_{4} \end{bmatrix} \quad \text{(Ec.A.4)}$$

En el caso de las probabilidades de transición y las probabilidades de estado en un modelo de Markov, todos los vectores son del mismo tamaño y todas las matrices son **cuadradas** (igual número de filas que de columnas). Si existen ***k*** estados posibles, la matriz ***R*** tendrá ***k*** filas y ***k*** columnas, y los vectores de probabilidades o proporciones de estado iniciales, finales o de cualquier período tendrán siempre ***k*** elementos, dispuestos como fila o como columna según convenga. Una matriz cuadrada de ***k*** filas y ***k*** columnas, o un vector de ***k*** elementos, se denomina "de orden ***k***".

Elevar al cuadrado una matriz no es lo mismo que elevar al cuadrado cada uno de sus elementos. El cuadrado de una matriz cuadrada **T** es un producto **T x T** que implica multiplicar cada fila por la respectiva columna. El producto de la primera fila por la primera columna será un escalar, que será el elemento c_{11} en la matriz resultante. El cuadrado de una matriz cuadrada es otra matriz cuadrada $\mathbf{T}^2$, equivalente a multiplicar **T x T**. El elemento c_{ij} de $\mathbf{T}^2$ es el producto de la fila ***i*** por la columna ***j*** de la matriz **T**.

La matriz identidad. Una matriz cuadrada muy usada es la **matriz identidad**, denotada por **I**. Esta matriz tiene **1** en las celdillas de la diagonal principal, y **0** en las demás celdillas. La siguiente es una matriz identidad de dimensión 4 (cuatro filas y cuatro columnas):

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa. A partir de la matriz identidad se define también una importante matriz, la matriz **inversa** de una matriz **cuadrada**, denotada como T^{-1}. Dada una matriz cuadrada ***T*** de orden ***k***, es decir una matriz con ***k*** filas y ***k*** columnas, su matriz inversa T^{-1} es aquella matriz del mismo orden que, multiplicada por ***T,*** arroja como resultado la matriz identidad:

$$TT^{-1} = I$$

Esta noción de matriz inversa es intuitivamente similar a la inversa de un número, es decir su recíproca, como 4 y 1/4, ya que la inversa de un número tiene la misma propiedad: un número multiplicado por su inversa es igual a 1. Una matriz cuadrada multiplicada por su inversa es igual a la matriz identidad.

Forma matricial de un sistema de ecuaciones. Supóngase que se tiene un sistema de ecuaciones lineales como el siguiente:

$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3=b_1$

$a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3=b_2$

$a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3=b_3$

Este sistema puede expresarse en forma de vectores y matrices de la forma siguiente:

$\boldsymbol{Ax = b}$

donde ***x*** es un vector columna cuyos elementos son X_1, X_2 y X_3; ***b*** es un vector columna con los tres coeficientes libres b_1, b_2 y b_3, y finalmente ***A*** es la matriz cuadrada de coeficientes a_{ij}**.** La solución del sistema de ecuaciones utiliza la matriz inversa $\boldsymbol{A^{-1}}$:

$\boldsymbol{x = A^{-1}b}$

Si en vez de usar los vectores columna ***x*** y ***b*** se utilizaran sus transpuestos ***x'*** y ***b'*** que son vectores fila, la formulación del sistema en forma matricial sería:

$\boldsymbol{x'A = b'}$

y la solución sería $\boldsymbol{x'=b'A^{-1}}$. Esta transposición no altera para nada los términos del problema ni la solución del mismo. En cualquier caso, para que el sistema tenga solución se requiere que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones, es decir que ***A*** sea una matriz cuadrada del mismo orden que ***x*** y que ***b***, y además se requiere que las ecuaciones sean independientes entre sí, esto es, que ninguna de ellas pueda obtenerse mediante una combinación de las otras. Esto equivale a requerir que el determinante de la matriz ***A*** no sea igual a cero.

Buenos Aires, DIC/2002

por **Héctor Maletta**
Investigador Principal, Área Empleo y Población, IDICSO, USAL.
Email: hmaletta@fibertel.com.ar

Referencias Bibliográficas

AGRESTI, Alan, 1990. **Categorical data analysis**. New York, John Wiley & Sons.

AHLO, Juha M., 1990. “Adjusting for non-response bias using logistic regression,” **Biometrika** 77(3), pp. 617-624.

ALDERMAN, Harold; Jere R. BEHRMAN; Hans-Peter KOHLER; John A. MALUCCIO & Susan COTTS-WATKINS, 2001. "Attrition in longitudinal household survey data**", Demographic Research** (www.demographic-research.org), Vol.5.

ALLISON, Paul D., 1984. **Event history analysis: Regression for longitudinal event data**. Thousand Oaks, California, Sage Publications, Quantitative Applications in the Social Sciences Series No.46.

ARMINGER, Gerhard, 1997. "Dynamic factor models for the analysis of ordered categorical data". En Berkane (1997), pp.177-194.

ARMINGER, Gerhard; Clifford C. CLOGG, & M. SOBEL, 1995. **Handbook of Statistical Modeling for the Social and Behavioral Sciences**, New York: Plenum Press.

BALTAGI, Badi H., 1995. **Econometric analysis of panel data.** London, J.Wiley and Sons.

BECKETTI, Sean, William GOULD, Lee LILLARD, & Finis WELCH, 1988, “The Panel Study of Income Dynamics after Fourteen Years: An Evaluation,” **Journal of Labor Economics** Vol. 6, pp. 472-492.

BERELSON, Bernard B.; Paul F. LAZARSFELD & W. McPHEE, 1954. **Voting**. Chicago, University of Chicago Press.

BERKANE, Maia (ed.), 1997. **Latent variable modeling and applications to causality**. New York, Springer-Verlag.

BIJLEVELD, Catrien C. J. H.; John VANDERKAMP & Leo J. Th. VAN DE KAMP, 1998. **Longitudinal Data Analysis : Designs, Models and Methods.** Newbury Park**,** Sage Publications.

BLALOCK, Hubert M. (editor), 1985. **Causal models in the social sciences**. Segunda edición. New York, Aldine De Gruyter.

BLALOCK, Hubert M., 1964. **Causal inferences in nonexperimental research**. Chapel Hill, The University of North Carolina Press.

BLALOCK, Hubert M., 1969. **Theory construction**. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.

BOUDON, Raymond, 1967. **L'analyse mathématique des faits sociaux**. Paris, Plon.

BRYK, Anthony S. & Stephen W. RAUDENBUSCH, 1992. **Hierarchical linear models**. Newbury Park, Sage Publications (segunda edición: 2000).

BUNGE, Mario, 1979. **Causality and modern science.** New York, Dover Publications.

COLEMAN, James, 1964a. **Models of change and response uncertainty**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (New Jersey).

COLEMAN, James, 1964b. **Introduction to mathematical sociology**. Glencoe, Free Press.

COLEMAN, James, 1968. "The mathematical study of change", en Hubert M. Blalock & Ann B. Blalock (editores), **Methodology in Social Research**, New York, McGraw-Hill.

COLEMAN, James, 1991**. Longitudinal Data Analysis.** New York, Basic Books.

COLLINS, Linda M. & A. G. SAYER (Editores.), 2001. **New methods for the analysis of change.** Washington, DC: American Psychological Association.

DAVIS, James A., 1985. **The logic of causal order**. Thousand Oaks, California, Sage Publications, Quantitative Applications in the Social Sciences Series No.55.

DIGGLE, Peter J., Kung-Yee LIANG & Scott L. ZEGER, 1994. **The Analysis of Longitudinal Data.** Oxford, Oxford University Press Clarendon Press.

DOOB, J.L., 1953. **Stochastic processes**, New York, J.Wiley and Sons p.239.

EEROLA, Mervi, 1994. **Probabilistic Causality in Longitudinal Studies.** New York, Springer-Verlag, 1994.

ESTES W. & C. J. BURKE, 1955. "Application of a statistical model to simple discrimination learning in human subjects", **Journal of Experimental Psychology**, pp. 81-88.

FINKEL, Steven E., 1995. **Causal analysis with panel data**. Thousand Oaks, California, Sage Publications, Quantitative Applications in the Social Sciences Series No. 105.

FIREBAUGH, Glenn, 1997. **Analyzing repeated surveys**, Thousand Oaks, California, Sage Publications, Quantitative Applications in the Social Sciences Series No. 115..

FITZGERALD, John, Peter GOTTSCHALK, & Robert MOFFITT, 1998, “An Analysis of Sample Attrition in Panel Data,” **The Journal of Human Resources** 33 (2): 251-99.

FREEDMAN Deborah; Arland THORNTON; Donald CAMBURN; Duanne ALWIN & Linda YOUNG-MARCO, 1988. "The life history calendar: a technique for collecting retrospective data", en Clifford C. CLOGG, (editor), **Sociological Methodology 1988**, Washington DC, American Sociological Association, pp.37-68.

GALTUNG, Johann, 1964. **Teoría y métodos de la investigación social**, Buenos Aires, EUDEBA, 2 vols.

GONG, Xiaodong & Arthur VAN SOEST, 2001. "Wage Differentials and Mobility in the Urban Labor Market: A Panel Data Analysis for Mexico". Documento de trabajo de IZA (Instituto de Estudios Laborales), Bonn. http://www.iza.org/publications/dps/.

HAGENAARS, Jacques A., 1990. **Categorical longitudinal data: Loglinear panel, trend and cohort analysis**. Newbury Park, Sage Publications.

HAGENAARS, Jacques A., 1994. "Latent variables in log-linear models of repeated observations". En von Eye y Clogg (1994), pp.329-352.

HAGENAARS, Jacques A. & Allan L. McCUTCHEON (editores), 2002. **Applied Latent Class Analysis.** Cambridge (UK), Cambridge University Press.

HAMERLE, A., & G. RONNING, "Panel Analysis for Qualitative Variables," en ARMINGER et al., 1995, pp. 401-451.

HAND, David & Martin CROWDER, 1996**. Practical Longitudinal Data Analysis.** Chapman & Hall Texts in Statistical Science Series, Londres, Chapman & Hall/CRC Press.

HECKMAN, J. 1981, "Statistical Models for Discrete Panel Data," en MANSKI &. McFADDEN (eds.), 1981, pp. 114-178.

HECKMAN, J., & B. SINGER, eds., 1982. **Econometric Analysis of Longitudinal Data**, número especial del **Journal of Econometrics**, vol. 18, pp. 1-190-

HECKMAN, J., & B. SINGER, eds., 1985. **Longitudinal Analysis of Labor Market Data,** Cambridge (UK), Cambridge University Press.

HSIAO, Cheng, 1986. **Analysis of panel data.** Cambridge Univ.Press, reimpresión 1999.

HYMAN, Herbert, 1963. **Survey design and analysis.** New York, Free Press.

KISH, Leslie, 1987. **Statistical design for research**. New York, John Wiley & Sons.

KYRIAZIDOU, E., 1997. "Estimation of a Panel Data Sample Selection Model," **Econometrica**, vol. 65, pp. 1335-1364.

KYRIAZIDOU, E., 1999. "Estimation of Dynamic Panel Data Sample Selection Models," en http://www.econ.ucla.edu/kyria/dsele/dsele.pdf.

LANCASTER, T., 1990. **The Econometric Analysis of Transition Data**, Cambridge (UK), Cambridge University Press.

LANGE, Oskar, 1964. **Introducción a la econometría**, México-Buenos Aires, Fondo de Cultura Económica.

LAZARSFELD Paul F. & Nell W. HENRY, 1968. **Latent structure analysis.** Boston, Houghton Mifflin.

LAZARSFELD Paul F., "Repeated observations on attitude and behavior items", incluido en STERNBERG, Saul; V.CAPECCHI; T.KLOEK; & C.T.LEENDERS (editores), **Mathematics and social sciences,** Paris, Mouton & Co., 1965.

LAZARSFELD Paul F., 1961. "The algebra of dichotomous systems", en SOLOMON Henry (editor), **Studies in item analysis and prediction.** Stanford University Press, Stanford, California, 1961.

LAZARSFELD, Paul F., B. BERELSON & H.GAUDET, 1948. **The people's choice.** New York, Columbia Univ. Press.

LILLARD, Lee A. & Constantijn W.A. PANIS, 1998, "Panel Attrition from the Panel Study of Income Dynamics," **The Journal of Human Resources**, Vol. 33 No.2, pp.437-457.

LITTLE, Roderick & Donald RUBIN, 1987. **Statistical analysis with missing data**, New York, John Wiley & Sons.

MAGNUSSON, David, Georg RUDINGER & Lars R. BERGMAN (eds.), 1994. **Problems and Methods in Longitudinal Research : Stability and Change.** European Network on Longitudinal Studies on Individual Development. Cambridge (UK), Cambridge University Press.

MALETTA, Hector, 1970. **Estructura latente de sistemas dicotómicos**, Buenos Aires, Editorial Nueva Visión.

MANSKI, C. and D. McFADDEN (eds.), 1981. **Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications**, MIT Press, London, 114-178.

MÁTYÁS, Laszlo, & Patrick SEVESTRE, 1996. **The Econometrics of Panel Data: A Handbook of the Theory with Applications,** segunda edición revisada. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McCULLOCH, Charles E. & Shayle Robert SEARLE, 2000. **Generalized, Linear, and Mixed Models.** Chichester (UK), J. Wiley & Sons.

MENARD, Scott, 1991. **Longitudinal research**. Thousand Oaks, California, Sage Publications, Quantitative Applications in the Social Sciences Series No.76.

MEREDITH, W., & HORN, J. (2001). "The role of factorial invariance in modeling growth and change", en L. M. COLLINS & A. G. SAYER (Eds.), 2001.

MERTON, Robert K & Paul F. LAZARSFELD (editores), 1950. **Studies in the scope and method of *The American Soldier***. Glencoe, Free Press.

NERLOVE, **Marc**, 2000. "An Essay on the History of Panel Data Econometrics". Documento de trabajo, Department of Agricultural and Resource Economics, University of Maryland. http://www.arec.umd.edu/mnerlove/mnerlove.htm.

NESSELROADE, John R., 1994. "Exploratory factor analysis with latent variables and the study of processes of development and change". En von Eye y Clogg (1994), pp.131-154.

PELZ, Donald C. & Frank M. ANDREWS, 1964. "Causal priorities in panel study data". **American Sociological Review**, pp.836-848.

PLEWIS, Ian, 1985. **Analysing Change: Measurement & Explanation Using Longitudinal Data.** Chichester (UK), J. Wiley & Sons.

POPPER, Karl R., [1934], **Logik der Forschung**. Viena. Versión inglesa actualizada: **The logic of scientific discovery,** Londres, Routledge, 1992. Traducción castellana, versión no actualizada: **La lógica de la investigación científica**, Madrid, Tecnos, 1973.

PRADHAN, M. & A. VAN SOEST, 1997, "Household labor supply in urban areas of Bolivia." **Review of Economics and Statistics,** vol.79, pp. 300-310.

RAO, B.Bhaskara (editor), 1994. **Cointegration for the applied economist**. Londres, MacMillan Press Ltd.

SAMAJA, Juan, 1995. **Epistemología y metodología,**, Buenos Aires, Eudeba, 1995.

SCHUSTER, Felix G., 1982. **Explicación y predicción**, Buenos Aires, CLACSO.

SIMON, Herbert A., 1952. "On the definition of the causal relation". **The Journal of Philosophy**, vol. 49, pp.517-528.

SIMON, Herbert A., 1987. "Causality in economic models", en John Eatwell y otros (editores), **The New Palgrave: A dictionary of economics**, Londres, MacMillan Press Ltd.

STOUFFER, Samuel et al., 1949. **The American Soldier**. Princeton University Press.

TISAK, J. & W. MEREDITH, 1990**.** "Longitudinal factor analysis"**,** en VON EYE (ed.) 1990**.**

VAN DEN BERG, Gerard J. & Maarten LINDEBOOM, 1998, "Attrition in Panel Survey Data and the Estimation of Multi-State Labor Market Models," **The Journal of Human Resources**, Vol. 33, No.2, pp. 458-478.

VERBEKE, Geert; G. MOLENBERGHS; P. BICKEL; & P. DIGGLE (Editores). **Linear Mixed Models for Longitudinal Data**, New York, Springer-Verlag, 2000.

VERMUNT, Jeroen K., 1997. **Log-linear models for event histories**. Thousand Oaks, California, Sage Publications, Advanced Quantitative Techniques in the Social Sciences Series No.8.

VON EYE, Alexander (editor), 1990**. Statistical methods in longitudinal research.** 2 Vols. Boston, Academic Press.

VON EYE Alexander & Clifford C. CLOGG (eds.), 1994. **Latent variables analysis: Applications for developmental research**. Tousand Oaks, California, Sage Publications.

ZABEL, Jeffrey E., 1998, "An Analysis of Attrition in the Panel Study of Income Dynamics and the Survey of Income and Program Participation with an Application to a Model of Labor Market Behavior," **The Journal of Human Resources,** Vol. 33 No.2.

ZEISEL, Hans, 1966. **Dígalo con números**, México, Fondo de Cultura Económica.

ZILIAK, James P. & Thomas J. KNIESNER, 1998, "The Importance of Sample Attrition in Life Cycle Labor Supply Estimation," **The Journal of Human Resources**, Vol. 33 No.2.