LAS CARACTERISTICAS DE LOS SISTEMAS FORMALES EN RELACION CON LA OBRA DE KURT GOEDEL

Tesis de Licenciatura presentada por:
Carlos Gustavo González
Madrina de Tesis:
Dra Rosa De Lío de Brizzio

Facultad de Filosofía
Universidad del Salvador
Buenos Aires, Agosto de 1984

"un sistema demasiado universal, un sistema en el que 'puede decirse demasiado', tiene que ser contradictorio." A. Mostowski (1)

PROLOGO

"Es sabido, que el desarrollo de la matemática en la dirección de una mayor exactitud ha conducido a la formalización de amplias regiones de ella, de tal modo que las demostraciones pueden ser llevadas a cabo por aplicación de unas pocas reglas mecánicas"(2).

Con estas palabras comenzaba su artículo un joven matemático austríaco en el año 1931, y en ellas se describía claramente lo que había ocurrido en los progresos matemáticos del medio siglo precedente. Pero el artículo que continuaba a dicho encabezamiento iba a producir un cambio de rumbo, mostrando claramente las limitaciones inherentes al proceder demostrativo mecánico.

Dicho artículo fue conocido, con el correr de los años, como el "Teorema de Gödel", y en él quedaban expuestos los primeros escollos insalvables con los que se encontraba el método demostrativo después de más de dos mil años de vida, en los cuales había sido señalado en numerosas oportunidades como paradigma del método científico.

En particular, allí se enunciaban dos resultados por demás significativos. Uno, que en los sistemas aritméticos considerados más amplios, se podían exponer fórmulas indemostrables que podían indicarse como verdaderas. Otro, que en dichos sistemas no podría demostrarse la no contradicción, con medios similares pero más reducidos que los que poseían.

El trabajo señalado fue la guía utilizada por numerosos autores para la obtención de otras importantes conclusiones, no sólo acerca de los sistemas formales, sino inclusive de computación.

El siguiente escrito pretende poner en evidencia el cambio de perspectiva para los sistemas formales a la que conllevan, tanto los resultados como los métodos, de la obra de Kurt Gödel.

INDICE

CAPITULO I

EL ESTUDIO DE LOS SISTEMAS FORMALES HACIA PRINCIPIOS DE SIGLO

El teorema de Gödel está precedido por una época de grandes avances en el estudio de los sistemas matemáticos y lógicos y, particularmente, por la maduración del concepto de sistema formal abstracto o mecanismo (en el sentido abstracto del término).

Hacia fines del siglo pasado el neokantismo en auge tiene una gran influencia sobre la filosofía de la ciencia, principalmente bajo la forma de un psicologismo que intentaba reducir las ciencias formales a meras consecuencias del pensar humano, en el sentido de que las leyes y los conceptos de la lógica y de la matemática no eran más que la manifestación de determinados procesos cerebrales.

De esta corriente de pensamiento participa el joven Husserl al escribir la Filosofía de la aritmética, y en el prólogo de las Investigaciones Lógicas, cuando ya ha abandonado al psicologismo, escribe: "Yo había participado de la convicción imperante de que la psicología es la que ha de dar la explicación filosófica de la lógica de las ciencias deductivas, como de toda lógica en general"(1).

Quien no había adherido al psicologismo reinante era Gottlob Frege, que por tal mérito había recibido las críticas del Husserl de la Filosofía de la aritmética. Frege, con una concepción que bien podríamos catalogar de idealista, distingue los conceptos puros de ciertas formas históricas que pueden tomar. En este sentido dice: "Lo que se llama historia de los conceptos es más bien una historia de nuestro conocimiento de los conceptos o de los significados de las palabras. Sólo a través de un gran trabajo intelectual, que puede durar siglos, se logra llegar, al fin, a conocer un concepto en su pureza, a despojarlo de envolturas extrañas que lo ocultaban a los ojos del espíritu"(2).

Se comprende entonces que para Frege, como las verdades de la matemática no se basan en la psicología, deben poseer otro fundamento distinto, siendo elocuente la imagen que da dicho autor: "Después que uno ha quedado convencido, tras vanos intentos de moverlo, de lo inamovible de un peñasco, aún se puede preguntar qué es lo que le presta apoyo tan seguro. Cuanto más se prosiguen estas investigaciones, a tantas menos verdades primitivas se retrotrae todo; y esta simplificación ya es en sí misma una meta que vale la pena perseguir"(3). Y sostiene que, como las verdades de la matemática son analíticas, las "verdades primitivas" son las de la lógica: "Las verdades de la aritmética, respecto a las de la lógica, deberían mantener un contacto semejante al de los teoremas respecto a los axiomas de la geometría"(4).

Esta concepción, según la cual la aritmética se deduce de la lógica, se conoce con el nombre de logicismo, y ya había sido esbozada antes de la publicación de Los fundamentos de la aritmética, según cita el propio Frege: "Muy decidido en favor de la naturaleza analítica de las leyes de los números se pronuncia W. Stanley Jevons: "Sostengo que el álgebra es una lógica altamente desarrollada, y que el número no es sino un discernimiento lógico""(5).

Debido a la posición que había asumido, mientras muchos de sus contemporáneos se hallan en investigaciones de neto corte psicológico, Frege se aboca de lleno a investigaciones acerca de la lógica y de la deducción. Y alcanza un éxito notable al desarrollar -en su obra Conceptografía de 1879- un cálculo lógico que es la base del usado actualmente.

Una década después aparecía en la ciudad italiana de Turín una pequeña obra escrita en latín con el título Arithmetices principia, nova methodo exposita, cuyo autor era el matemático italiano Giuseppe Peano.

A pesar de su brevedad (XVI+20 pág.), esta obra contenía una gran parte de la aritmética, merced a haber logrado una notable economía de medios. Es de destacar que en dicha obra aparece el llamado "axioma de inducción completa", que se utiliza para asignar propiedades a clases infinitas. Tal axioma expresa que, en primer lugar, si el primer número posee una propiedad -por ejemplo, si el número uno posee dicha propiedad-, y, en segundo lugar, si cada vez que la posee un número cualquiera la posee el siguiente de dicho número -por ejemplo, si la posee el uno entonces la posee el dos, si la posee el dos, también el tres, etc.-, entonces todos los números naturales poseen la propiedad antedicha.

Por las contribuciones de Frege y de Peano parecía que, hacia principios de este siglo, era tarea relativamente sencilla el convertir la lógica y la aritmética en un sistema deductivo. Pero en 1902 Frege recibe una desagradable sorpresa: una carta del por entonces joven Bertrand Russell (6) le anuncia que dentro de su sistema se puede formular una paradoja: "Sea w el predicado: ser un predicado que no se predica de sí mismo. ¿Puede w predicarse de sí mismo? De cada respuesta se sigue la opuesta."(7) Frege contesta: "Su descubrimiento de la contradicción me causó la más grande sorpresa y, casi diría, consternación"(8).

Este problema de las paradojas que pueden formularse en los sistemas lógicos fue solucionada por el propio Russell, mediante la teoría de los tipos. Así, en 1910-13 aparece la obra Principia mathematica, escrita por Whitehead y Russell, en la que se expone bajo la forma de una teoría deductiva la lógica proposicional, de predicados, de clases y de relaciones y prácticamente toda la aritmética de su tiempo. Esta obra es tenida por Russell como un triunfo de la escuela logicista, a tal punto que llegó a decir: "Para acallar las voces de quienes no admiten la identidad de lógica y matemática, nosotros podemos desafiarlos a indicar en qué punto, de las sucesivas definiciones y deducciones de Principia Mathematica consideran que termina la lógica y comienza la matemática"(9). Pero una de las definiciones que parece tener una estrecha vinculación sólo con la matemática es el axioma de infinito.

A pesar de que las dificultades que crearon las paradojas fueron convincentemente solucionadas, cimentaron la desconfianza en los matemáticos de principios de siglo. En efecto, si en sistemas que aparecían como confiables, y en los cuales sólo se usaban conceptos y deducciones que eran claros a la intuición, habían podido formularse contradicciones y paradojas, ¿qué garantía se tenía que no iban a aparecer otras en los próximos pasos?.

Frente a este hecho surgieron las otras dos escuelas que acompañaron al logicismo de Frege y Russell en los comienzos de este siglo. Estas son: el intuicionismo, que se desarrolló bajo la inspiración de Brouwer, y el formalismo, que tuvo a la cabeza a Hilbert.

Refiriéndose a Brouwer, dice Weyl: "De acuerdo con su punto de vista y su interpretación de la historia, la lógica clásica fue abstraída de la matemática de los conjuntos finitos y sus subconjuntos... Olvidando este limitado origen, se entendió después erróneamente que la lógica es algo que se encuentra por encima de y que es anterior a toda matemática, y finalmente se la aplicó, sin justificación, a la matemática de los conjuntos infinitos"(10)"Brouwer estableció claramente, y a mi entender más allá de toda duda, que no hay evidencia que soporte la creencia en el carácter existencial de la totalidad de los números naturales...La secuencia de números que va creciendo más allá de todo límite ya alcanzado mediante el paso al número siguiente, es una multitud de posi-

El programa de Hilbert, conocido con el nombre de formalista, tiene como meta un nuevo tipo de fundamentación de la matemática. A tal efecto se inicia otra clase de trabajos teóricos dentro de una nueva disciplina que se denomina "metamatemética". En resumen, si los sistemas lógicos y matemáticos habían deparado sorpresas, era por el desconocimiento de tales sistemas. Si, en cambio, los sometíamos a estudio, entonces se podría prever lo que acontecería y lo que no, en los subsiguientes desarrollos de los formalismos.

El punto culminante de los estudios metamatemáticos era la demostración de que en un sistema formal determinado nunca iba a aparecer una contradicción, con lo cual se consideraría que tal sistema estaba suficientemente fundado.

La estrategia que desarrollo Hilbert para alcanzar tan ambicioso objetivo era una suerte de reducción del infinito a términos finitos. En matemática, por más que se trabajara con el infinito, este sólo podía surgir como interpretación de alguna secuencia finita de signos, es decir, como el significado de una determinada fórmula. Pero como con el surgimiento del infinito se perdía nuestra intuición y comenzaban las dificultades, la solución propuesta era que se consideraran sólamente las secuencias de signos, sin atención al significado que se les atribuía. Así, el estudio de los sistemas formales se reducía a las consideraciones acerca de las combinaciones que se pueden realizar con ciertos signos. En estas combinatorias no entraba para nada el concepto de infinito y, por lo tanto, debían ser fácilmente predictibles.

Con los estudios metamatemáticos se fue forjando un vocabulario técnico referente a las propiedades de los sistemas formales, definiciones que pasaremos a detallar, puesto que son utilizadas a lo largo de este trabajo.

En primer lugar se denominará coherente a un sistema formal en el cual, para una interpretación dada, no es verdadera ninguna contradicción. Vinculado a este último, reservamos el término "consistencia" para características relacionadas a la demostración. Así, definimos que un sistema con reglas de inferencia y un concepto de negación, es simplemente consistente si, y sólo si, para toda fórmula A demostrable, no es demostrable la negación de A (14).

En la lógica proposicional clásica -como la desarrollada en Principia Mathematica-, existe el teorema $p \supset (\neg p \supset q)$, por lo cual, mediante una simple aplicación del Modus Ponens (regla de separación), a partir de una fórmula cualquiera y de su negación, se puede demostrar toda fórmula del sistema (15), con lo cual la demostración pierde todo valor y se convierte en una suerte de artificio inútil. Se ve, entonces, que, en un sistema que posea dicha lógica, el hecho de que no pueda deducirse una contradicción, tiene un valor especial. Pero como un sistema puede poseer otras lógicas, se suele definir otro concepto de consistencia, mucho más general y más importante que el de consistencia simple. En este sentido se dirá que un sistema es absolutamente consistente si, y sólo si, al menos una fórmula no es demostrable en dicho sistema (16). De lo antedicho se extrae como consecuencia que ambos conceptos son equivalentes en la lógica proposicional clásica. En este trabajo, cuando ambas definiciones no sean equivalentes se deberá interpretar el término "consistente" en este último sentido.

Respecto al concepto de completud, debe decirse que puede ser definido de diferentes maneras (17). En el marco del presente estudio tiene importancia el que se denomina "completud en sentido débil". Para poder definir este concepto, vamos a hacerlo antes con el de "fórmula universalmente válida". Supongamos a tal efecto un sistema formal con variables, constantes, una regla de sustitución y una interpretación dada. En tal sistema se denominará fórmula universalmente válida a toda fórmula con variables, de modo que, para toda sustitución de las variables por constantes se obtengan sólo proposiciones verdaderas (18). Un sistema formal como el enunciado en último lugar, que posea además reglas de inferencia, se denominará completo si, y sólo si, son demostrables todas las fórmulas universalmente válidas (19).

Conceptos equivalentes a los aquí mencionados ya habían sido definidos por Hilbert y miembros de su escuela con anterioridad al Teorema de Gödel. En dicho trabajo Gödel dio la primera definición de "decidible" (entscheidungsdefinit) (20). Actualmente se denomina a un sistema formal decidible si se cuenta con un procedimiento efectivo que permita demostrar todos los teoremas (21).

CAPITULO II

EL MECANISMO DE LA DEMOSTRACION Y LA PARADOJA DE RICHARD

Para comprender mejor el desarrollo del Teorema de Gödel, es necesario tener presente el mecanismo general de la demostración. En tal sentido el propio Gödel encabeza su trabajo con una descripción previa de los principios de la prueba, realizada a modo de un esbozo.

Dadas las dificultades inherentes a la prueba misma, creo conveniente la definición de un par de conceptos que contribuyan a su comprensión, y que a la vez, creen cierta perspectiva que sirva para extender los resultados de dicho trabajo hacia cierta concepción general de los sistemas formales, que se irá constituyendo a lo largo de este trabajo.

Dichos conceptos son el de la aritmética como lenguaje y como mecanismo. De ningún modo se piense que dichos conceptos son mutuamente excluyentes, sino simplemente, que son dos concepciones de la aritmética.

Los lenguajes han nacido de las necesidades de comunicación entre los hombres, y en tal sentido poseen, por así decirlo, una finalidad que le es extrínseca (1). Pero la necesidad no implica una concepción reducida: formas como el arte pueden ser necesidades y puede hablarse de un lenguaje artístico.

Debe tenerse en cuenta que los lenguajes son entes eminentemente plásticos (2). Cuando se comenzó con la tarea de que las computadoras comprendieran los lenguajes naturales, se cayó en la cuenta que dentro de una concepción rígida es imposible su utilización como medio de comunicación. Uno de los primeros programas capaz de comprender un reducido grupo de órdenes en idioma inglés se conoció con el nombre de SHRDLU y, con respecto a sus limitaciones, dice Hofstadter: "Lo sorprendente del lenguaje es la imprecisión con que lo manejamos y cómo, pese a ello, nos es posible servirnos satisfactoriamente de él. SHRDLU utiliza las palabras de una manera "metálica";

en cambio las personas lo hacen de una manera "maleable", "elástica", e inclusive de "rosca ajustable": si las palabras fueran tuercas y bulones, lo que hace la gente es conseguir que cualquier tuerca se ajuste a cualquier bulón, mediante el simple recurso de comprimir y estrujar uno dentro del otro, tal como en algunas pinturas surrealistas, donde todas las cosas presentan una consistencia blanda. El lenguaje, en manos humanas, se transforma prácticamente en un elemento fluido" (3).

Si damos un vistazo a los lenguajes históricos vemos cómo se fueron desarrollando a través del tiempo para responder a las nuevas necesidades y a las nuevas concepciones. La dinámica de esta evolución es tal, que en repetidas ocasiones hay que reconocer que ya se trata de otro idioma.

Las ciencias, desde sus orígenes, se ven en la necesidad de gestar nuevos lenguajes. En un principio, aprovechando la plasticidad de las lenguas naturales, utilizan a éstas como base y la modifican en el sentido de sus finalidades. Luego, la brecha entre los idiomas históricos y los lenguajes científicos se va ahondando, llegando en algunos casos al punto donde sólo poseen en común algunos términos, pero utilizados con diferente significado.

Dentro del tipo de procesos descritos, se dio un gran paso cuando se constituyó un lenguaje geométrico. A tal punto se ha destacado la importancia de este hecho que Geymonat señala como causa de que la geometría haya llegado a ser ciencia entre los griegos y la física no, es, precisamente, la creación del lenguaje científico propio de la geometría (4).

Así, en un sentido muy general de lenguaje, podemos considerar a la aritmética como un lenguaje. En primer lugar forman parte de las lenguas históricas conocimientos aritméticos elementales: los términos